Elemente der Analysis

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

Funktion (Abbildung)

Wertebereich

$$f : D \to W \quad ; \qquad D \subset \mathbb{R}$$
$$W \subset \mathbb{R}$$

Definitionsbereich

ordnet jedem Argument $x \in D$ genau einen Funktionswert $f(x) \in W$ zu.

Notation:
$$f : D \to W$$
$$x \mapsto f(x) = [\text{Zuordnungsvorschrift}]$$

kurz: „$f : x \mapsto [\dots]$"

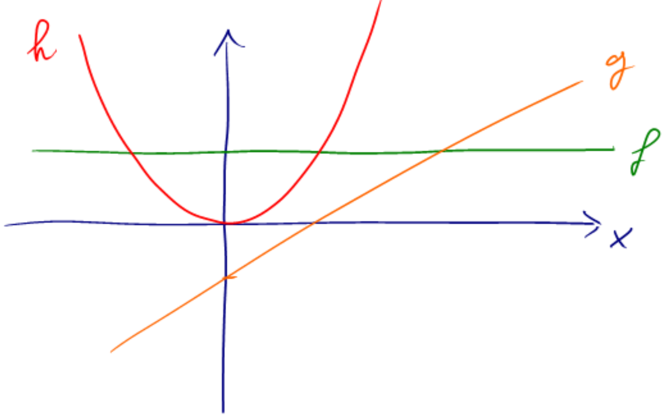
kürzer: „$x \mapsto f(x) = [\dots]$"

noch kürzer: „$f(x) = [\dots]$"

Beispiele:

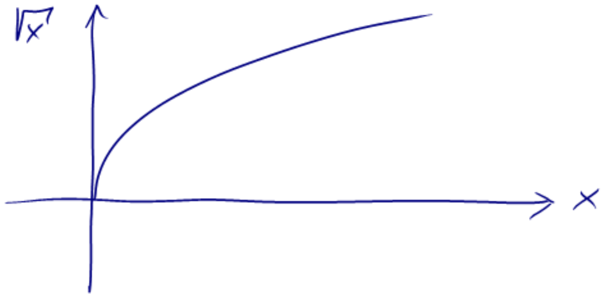
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto bx - c$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto dx^2$

  $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

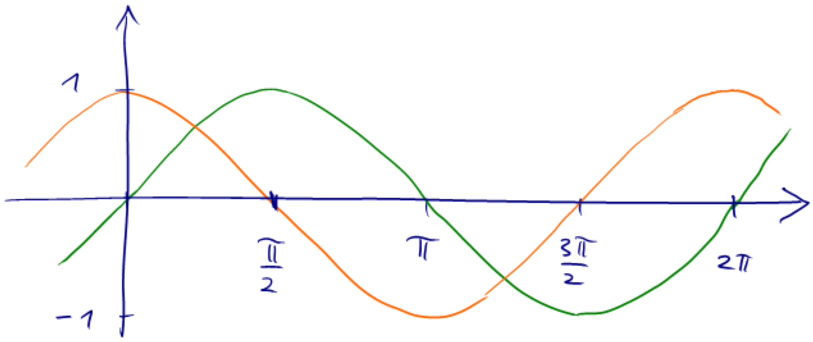


- $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

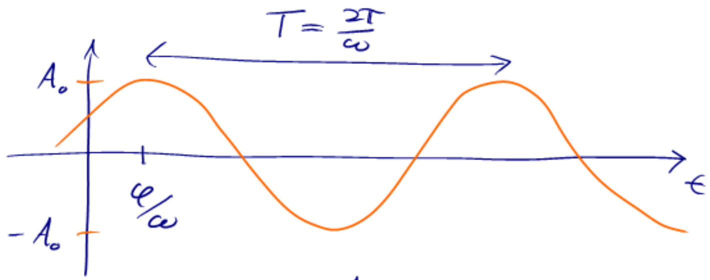
$$\sqrt{x} : [0,\infty[\; \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x}$$



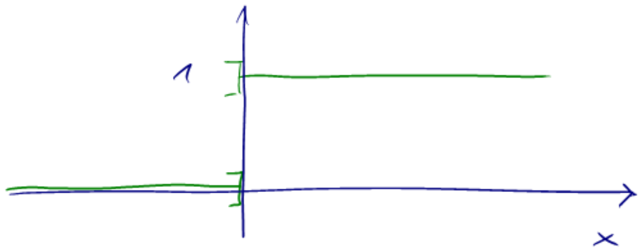
- $\sin, \cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$



- $A(t) = A_0 \cos(\omega t - \varphi)$:



- Stufenfunktion $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$



- Polynom vom Grad k :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k \quad ; \quad (a_k \neq 0)$$

Verknüpfungen von Funktionen

für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ erklären wir:

Summe $\quad f + g : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

Skalarmultiplikation $\quad \lambda f : D \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

Summe und S. Mult. von Funktionen $D \to \mathbb{R}$ erfüllen offenbar Axiome von Vektoraddition und -skalarmultiplikation,
$\to$ Menge aller Funktionen $D \to \mathbb{R}$ bilden Vektorraum.

ein Skalarprodukt im Falle $D = [a,b]$ ist z.B. durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

gegeben (vgl. Übung) $\longrightarrow$ Orthogonalität, Projektion, ...

Produkt $\quad fg : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (fg)(x) := f(x)\, g(x)$

Quotient $\quad f/g : D \setminus (\text{Nullstellen von } g) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto f(x)/g(x)$

für Funktionen $f: D_1 \to W_1$, $g: D_2 \to W_2$ mit $W_1 \subset D_2$ definieren wir

Verkettung (auch: Komposition) von f und g durch

$$(g \circ f) : D_1 \to W_2$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Umkehrfunktion

a) Funktion $f: D \to W$ ist umkehrbar/bijektiv/1-zu-1 g.d.w. für jedes $y \in W$ genau ein $x_y \in D$ existiert s.d.

$$f(x_y) = y.$$

b) die Umkehrfunktion f^{-1} einer umkehrbaren Fkt. $f: D \to W$

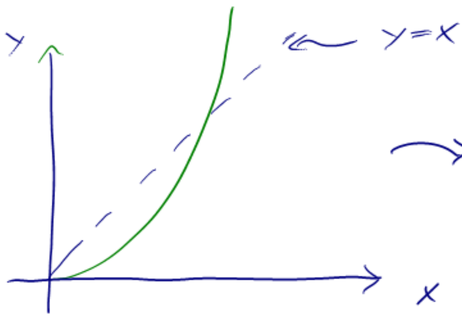
ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f^{-1} : W &\longrightarrow D \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) := x_y \end{aligned}$$ (wie unter a))

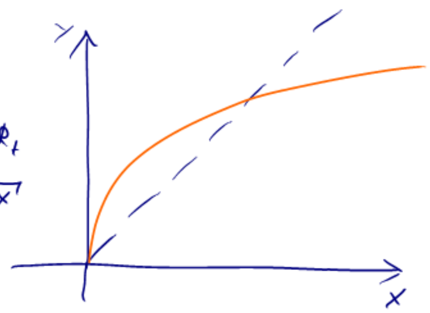
<u>Beziehungen / Bemerkungen</u>:

- $f \circ f^{-1} = id = f^{-1} \circ f$
- $(f^{-1})^{-1} = f$
- $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- im x-y Diagramm mit gleichen Einheiten entsteht Graph von f^{-1} durch <u>Spiegelung</u> des Graphs von f an $x=y$-Geraden:

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2$



$\longrightarrow$ $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x}$

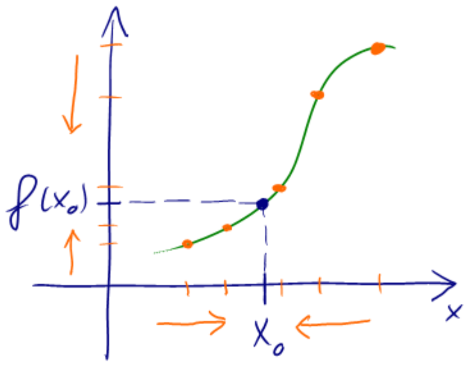


⌜ Notation:

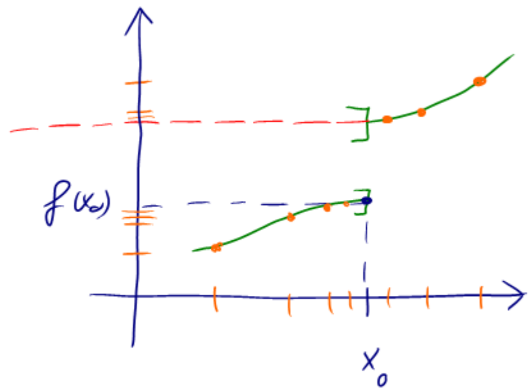
$$f = g \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{für alle } x : f(x) = g(x)$$ ⌟

Stetigkeit, stetige Funktionen

grob: Fkt. f stetig in x_0 :<=> "für $x \to x_0$ strebt $f(x)$ beliebig nahe gegen $f(x_0)$."



stetig in x_0

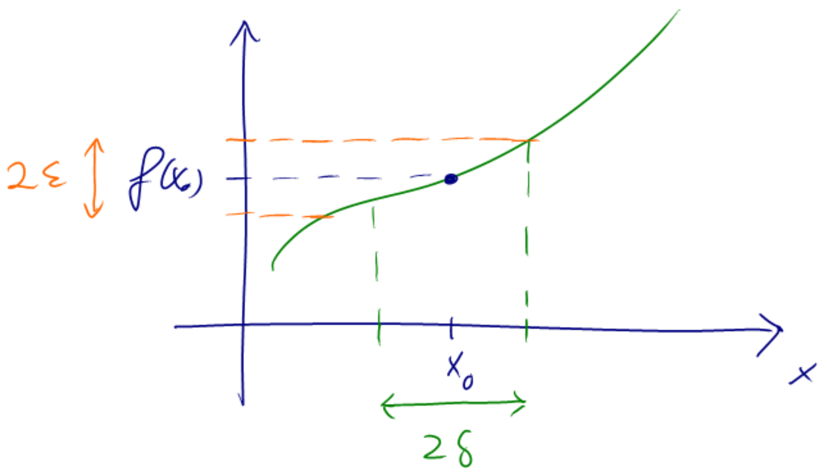


unstetig in x_0

genauer:

- Fkt. f stetig in x_0 :<=> für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



- $f: D \to W$ stetige Funktion :<=> für alle $x \in D$: f stetig in x

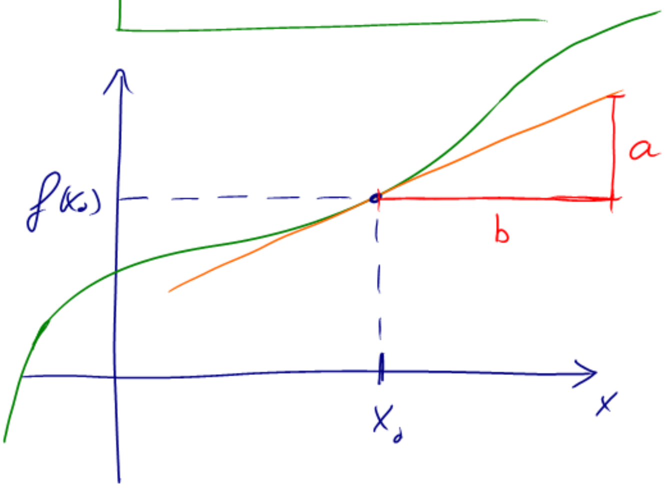
Satz

Verknüpfungen und Umkehrfunktionen (sofern existent) stetiger Funktionen sind stetig.

(vgl. Analysis)

Ableitung einer Funktion

grob: $\boxed{\text{Ableitung } f'(x_0) \text{ von Fkt } f \text{ in } x_0 \equiv \text{Steigung des Funktionsgraphen von } f \text{ bei } x_0 :}$



$$f'(x_0) = \frac{a}{b} \overset{!}{\approx} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

für $h \to 0$

genauer:

$$\boxed{f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

(sofern existent)

[d.h.: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass für alle $h \in \,]-\delta, +\delta[$:

$$\left| \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$
]