Def.: Differenzierbarkeit, Ableitung

- Eine Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 g.d.w. der Grenzwert $h \to 0$ des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\equiv \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

existiert. Ist f differenzierbar in x_0, so ist

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

die Ableitung von f in x_0.

- Die Ableitung von f ist die Funktion

$$f' : x \longmapsto f'(x) \quad .$$

alternative Notationen:

- $f' \equiv \dot{f} \equiv \frac{df}{dx}$

- $f'(x) = \dot{f}(x) = \frac{df}{dx}(x)$

Anwendung: Lineare Näherung

einer Funktion f in x_0:

Erwartung: für hinreichend kleines aber endliches h:

$$f'(x_0) \overset{?}{\approx} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\longrightarrow \qquad f(x_0+h) \overset{!}{\approx} f(x_0) + f'(x_0)\,h ,$$

d.h. für $|x-x_0|$ hinreichend klein: $\quad (h = x - x_0)$

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$$

lineare Näherung von f in x_0

Beispiele:

a) $\quad f(x) = ax + b \;\rightarrow\; f'(x) = a ,$

denn $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\Big(a(x+h)+b-(ax+b)\Big) = a .$

b) $\quad g(x) = x^2 :$

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{1}{h}\left(x^2+2hx+h^2-x^2\right) = 2x+h \xrightarrow{h\to 0} 2x$$

d.h. $g'(x) \equiv (x^2)' = 2x$.

c) $h(x) = x^3$:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{1}{h}\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3\right)$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2 \xrightarrow{h\to 0} 3x^2$$

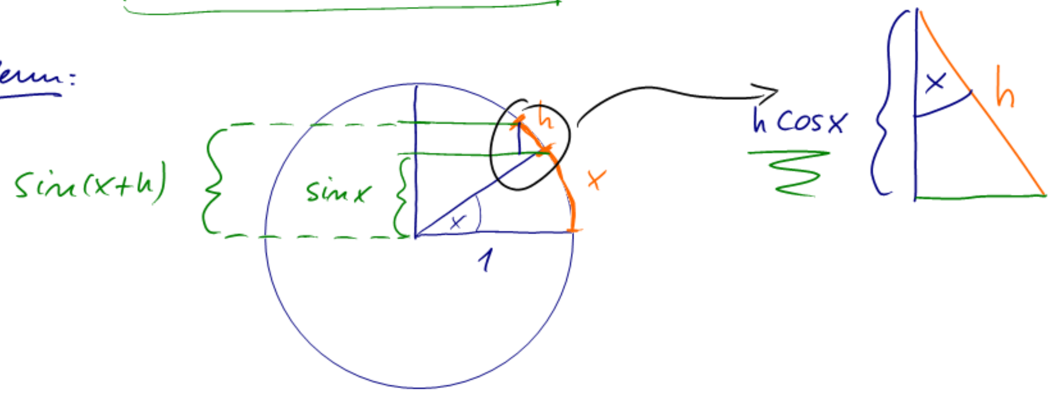
d.h. $h'(x) \equiv (x^3)' = 3x^2$

d) für $n \in \mathbb{Z} \equiv \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ist

$$\boxed{(x^n)' = n\, x^{n-1}}$$ (vgl. Übg.)

e) $$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

denn:



d.h. für $h \to 0$: $\frac{1}{h}\left(\sin(x+h) - \sin x\right) = \cos x$ ✓

analog: $$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

f) Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$:

$f(x) = a^x$, $(a^x)' = ?$

$$\frac{1}{h}\left(a^{x+h} - a^x\right) = \underbrace{\frac{1}{h}\left(a^h - 1\right)}_{\text{unabhängig von } x} a^x$$

d.h. $\quad (a^x)' = c_a\, a^x \quad$ mit $\quad c_a = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(a^h - 1)$

Euler (1707–1783) : wähle a so, dass $c_a = 1$ **!**

$\rightarrow$ dieses so bestimmte a ist die Eulersche Zahl e

es gilt somit $\quad \boxed{(e^x)' = e^x}$

Welchen numerischen Wert hat e?

mit $h \equiv \frac{1}{n}$ gilt wegen $\quad \frac{1}{h}(e^h - 1) = 1$ für $h \to 0$

auch $\quad n(e^{1/n} - 1) = 1 \quad$ für $n \to \infty$,

$\rightarrow \quad \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = e \quad$ " " "

d.h. $\quad \boxed{e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \overset{!}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}$

wird später gezeigt

Ableitungsregeln:

1) $\quad (\lambda f)' = \lambda f'$,

$(f + g)' = f' + g' \qquad$ (Linearität)

2) $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (Produktregel)

3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

4) $(f \circ g)' = (f' \circ g)\, g'$ (Kettenregel)

d.h.: $\big(f(g(x))\big)' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{äußere}} \underbrace{g'(x)}_{\text{innere}}$ Ableitung

5) $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

<u>Beispiel</u>:

$$\left(\sin(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\right)' \overset{2)}{=} \sin(kx)'\, e^{-x^2/2\sigma^2} + \sin(kx)\left(e^{-x^2/2\sigma^2}\right)'$$

$$\overset{1)\,4)}{=} k\cos(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2} + \sin(kx)\, e^{-x^2/2\sigma^2}\left(-\frac{x}{\sigma^2}\right)$$

$$= \left(k\cos(kx) - \frac{x}{\sigma^2}\right) e^{-x^2/2\sigma^2} .$$

obige Ableitungsregeln können wie folgt gezeigt werden:

zu 1) wegen $\frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} = \lambda\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$,

$$\frac{1}{h}\big(f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))\big) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

zu 2)

$$\frac{1}{h}\Big(\underbrace{f(x+h)}_{\substack{\| \\ f(x)+f'(x)h}} \; \underbrace{g(x+h)}_{\substack{\| \\ g(x)+g'(x)h}} - f(x)\,g(x) \Big) =$$

$\leftarrow$ Lin. Näherg $\rightarrow$

$$= \cancel{\frac{1}{h}}\Big(\cancel{f(x)g(x)} + \cancel{h} f'(x)g(x) + \cancel{h} f(x)g'(x) + \underbrace{h^{\cancel{2}} g'(x) f'(x)}_{\longrightarrow 0} - \cancel{f(x)g(x)} \Big)$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

zu 4):

$$\frac{1}{h}\Big(f(\underbrace{g(x+h)}_{\substack{\| \text{ l.N.} \\ g(x)+g'(x)h}}) - f(g(x)) \Big)$$

$$= \frac{1}{h}\Big(\underbrace{f(g(x)+g'(x)h)}_{\substack{\| \text{ l.N.} \\ f(g(x))+h g'(x) f'(g(x))}} - f(g(x)) \Big)$$

$$= f'(g(x))\,g'(x) \quad .$$

zu 3):

$$\left(\frac{1}{g}\right)' \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{x}\circ g\right)' \stackrel{4)}{=} \left(-\frac{1}{x^2}\circ g\right) g' = -\frac{g'}{g^2}$$

dann

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \stackrel{2)}{=} f'\frac{1}{g} - f\,\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \, .$$

zu 5):
$$y \overset{!}{=} (f \circ f^{-1})(y)$$

$$\rightarrow \quad 1 = (f \circ f^{-1})'(y) \overset{4)}{=} f'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y)$$

d.h. $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Höhere Ableitungen

Fkt. $f: x \longmapsto f(x)$

$\rightarrow$ Ableitung $f^{(1)} = f' : x \longmapsto f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\rightarrow$ <u>2. Ableitung</u> $f^{(2)} \equiv f'' : x \longmapsto f''(x) := (f')'(x)$

$\rightarrow$ <u>3. Ableitung</u> $f^{(3)} \equiv f''' : x \longmapsto f'''(x) = (f'')'(x)$

$\vdots$

d.h. $$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad \text{für } n \geq 1$$

und $$f^{(0)} := f$$

<u>Beispiele</u>:

1) $f(x) = x^5$

$\rightarrow f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 5 \cdot 4\, x^3, \quad f^{(3)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3\, x^2,$

$f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2\, x, \quad f^{(5)}(x) = 5!, \quad f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geq 6$.

2) $(e^x)^{(n)} = e^x$. (da $(e^x)' = e^x$)

3) wegen $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$ gilt:

$$\left.\begin{aligned} (\sin x)^{(1)} &= \cos x \\ (\sin x)^{(2)} &= -\sin x \\ (\sin x)^{(3)} &= -\cos x \\ (\sin x)^{(4)} &= \sin x \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{d.h.:} \quad \begin{aligned} (\sin x)^{(2\ell)} &= (-1)^{\ell} \sin x \\ (\sin x)^{(2\ell+1)} &= (-1)^{\ell} \cos x \\ &(\ell = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} (\cos x)^{(1)} &= -\sin x \\ (\cos x)^{(2)} &= -\cos x \\ (\cos x)^{(3)} &= \sin x \\ (\cos x)^{(4)} &= \cos x \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{d.h.:} \quad \begin{aligned} (\cos x)^{2\ell} &= (-1)^{\ell} \cos x \\ (\cos x)^{2\ell+1} &= -(-1)^{\ell} \sin x \end{aligned}$$