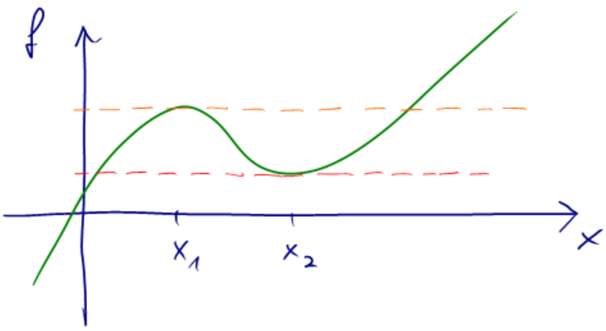
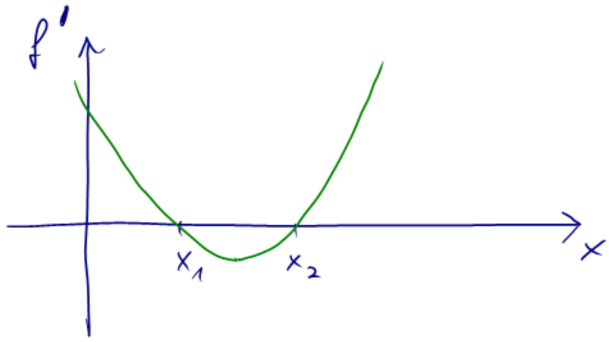
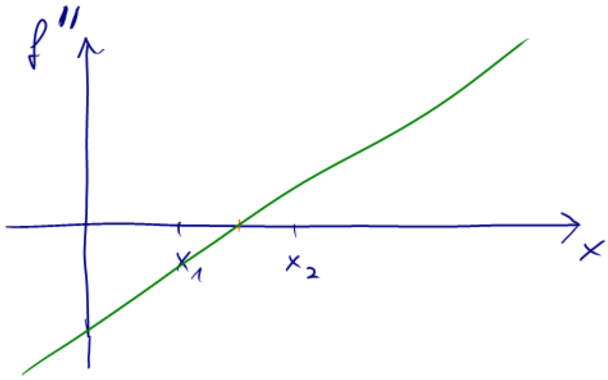
Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums:







(i) x_0 Stelle eines lokalen Extremums $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

(ii) $f'(x_0) = 0$ und $\underline{f''(x_0) < 0}$ $\Longrightarrow$ x_0 Stelle eines lokalen <u>Maximums</u>

(iii) $f'(x_0) = 0$ und $\underline{f''(x_0) > 0}$ $\Longrightarrow$ x_0 Stelle eines lokalen <u>Minimums</u>

Taylor-Entwicklung

<u>Idee</u>: nähere Fkt. $f(x)$ um $x = 0$ (allgemein: $x = x_0$) durch <u>Polynom n-ten Grades</u>

$$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

so, dass

$$\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) \overset{!}{=} f^{(\ell)}(0) \qquad (*)$$

für $\ell \leq n$.

→ <u>Bestimmung der Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:</u>

wegen
$$(x^n)^{(\ell)} = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-\ell+1)\, x^{n-\ell} & : \ell \leq n \\ 0 & : \ell > n \end{cases}$$

folgt
$$\tilde{f}_n^{(\ell)}(0) = \begin{cases} \ell!\, a_\ell & : \ell \leq n \\ 0 & : \ell > n \end{cases}$$

und somit nach $(*)$:

$$\boxed{a_\ell = \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)} \qquad \text{für } \ell \leq n$$

(Reihe)

→ <u>Taylor-Entwicklung n-ter Ordnung von f im $x = 0$:</u>

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)\, x^\ell} ;$$

... <u>im $x = x_0$</u>:

$$\boxed{\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0)\, (x-x_0)^\ell}$$

d.h. genau:
$$\boxed{\tilde{f}_n(x_0+h) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0)\, h^\ell}$$

Bemerkungen:

1) $\tilde{f}_0(x) = f(x_0)$: „0-te Näherung"

2) $\tilde{f}_1(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h$: Lineare Näherung

3) $\tilde{f}_2(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{1}{2} f''(x_0)\,h^2$:

quadratische Näherung

4) eine analytische Funktion f erfüllt per def.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) \equiv \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}(0)\, x^\ell$$

(genauer in Analysis I, II)

Taylor-Reihe / Potenzreihe der Fkt. f

Beispiele:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; Taylor-Entwicklung um $x=0$:

$$\to \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(\ell)}(x) = \ell(\ell-1)(\ell-2)\cdots \frac{1}{(1-x)^{\ell+1}}$$

d.h. $\quad f^{(\ell)}(0) = \ell!$ und somit

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}\, \ell!\, x^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} x^{\ell}$$

somit $\boxed{\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n}$

tatsächlich gilt für $|x| < 1$:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots}$$

exakt!

Geometrische Reihe

wegen $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$ erhalten hieraus:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - x^3 \dots$$

2) $f(x) = e^x$; Taylor-Entwicklung um $x=0$:

$f^{(\ell)}(x) = (e^x)^{(\ell)} = e^x$; d.h. $f^{(\ell)}(0) = e^0 = 1$

und somit

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} x^{\ell} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \frac{1}{n!}x^n$$

die Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} x^{\ell}/\ell!$ ist (absolut) konvergent

$$\rightarrow \quad \boxed{e^x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^{\ell}} \quad \text{für } \underline{\text{alle}}\ x \in \mathbb{R}$$

somit $\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1/n\right)^n \equiv e = e^1 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!}$

$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2}}_{2{,}5} + \frac{1}{6}}_{2{,}67} + \frac{1}{24}}_{2{,}71} + \frac{1}{120} + \dots = 2{,}718\dots$$