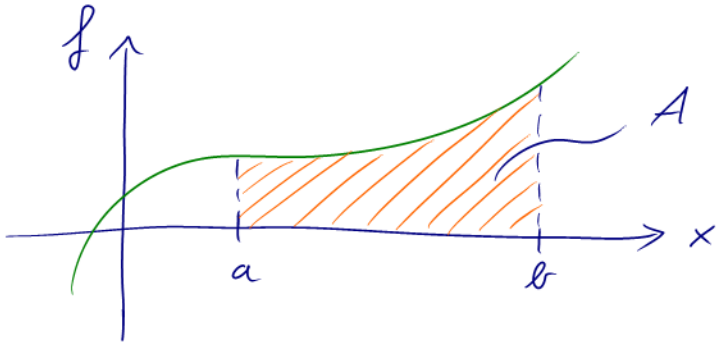
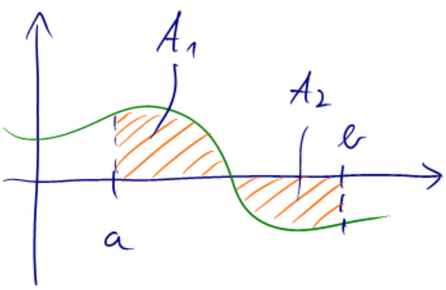
Integral

einer Fkt. f von a bis b: $\int_a^b f(x)\,dx$,

grob:



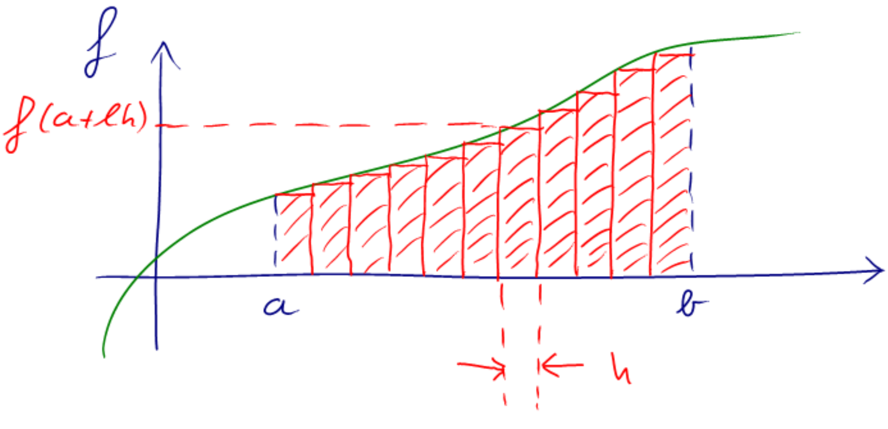
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{"Flächeninhalt } A \text{ der durch } a, b \text{ und Graph von } f \text{ definierten Fläche"}$$



dann: $\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$

genauer:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{h\to 0} \sum_{l=0}^{(b-a)/h} h\, f(a+lh) \qquad (b \geq a)$$



Falls $b < a$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

→ Eigenschaften des Integrals

1) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

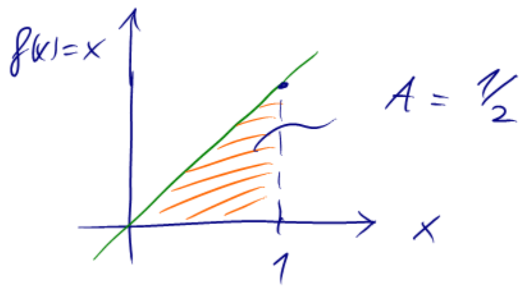
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Linearität

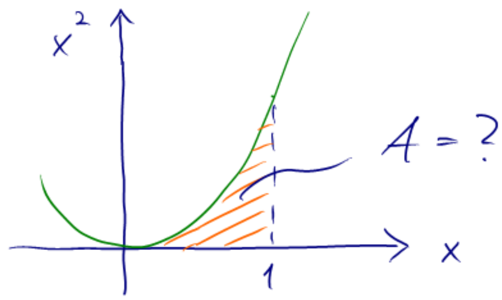
2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

elementare Beispiele:

1) $$\int_0^1 x\,dx \overset{!}{=} 1/2$$



2) $$\int_0^1 x^2\,dx = ?$$



$$\sum_{l=0}^{n} l^2 = \frac{1}{3} n(1+n)\left(\frac{1}{2}+n\right)$$

$$\sum_{l=0}^{1/h} h\,(hl)^2 = h^3 \cdot \frac{1}{3}\,\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{h}\right) \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{3}, \text{ d.h. } \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Wesentlich besser geht es mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI):

Definition

F ist Stammfunktion von Fkt f g.d.w.

$$F' = f$$

HDI:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \overset{!}{=} F(b) - F(a)} \equiv F(x)\Big|_a^b$$

(F Stammfuntion von f: $F' = f$)

Γ

Zum Beweis des HDI zeigt man, dass die Fkt

$$g_a : t \longmapsto g_a(t) = \int_a^t f(x)\,dx - F(t) + F(a)$$

konstant vom Wert 0 ist ($g_a = 0$), insbesondere $g_a(b) = 0$

$\longrightarrow$ HDI.

Zur Konstanz von g_a zeigt man $g_a' = 0$ (d.h. $g_a'(t) = 0$ für alle t); $g_a = 0$ folgt dann wegen $g_a(a) = 0$.

$g_a' = 0$:

$$g_a'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(x)\,dx - F(t) + F(a)\right)$$

$$= \underbrace{-F'(t)}_{\overset{\shortparallel}{-f(t)}} + \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \underbrace{\left(\int_a^{t+h} f(x)\,dx - \int_a^{t} f(x)\,dx \right)}_{\begin{array}{c} \leq \int_t^{t+h} f(x)\,dx \to h\,f(t) \\ \end{array}} = 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f(t)}$$

$\square$

Bemerkungen:

- jede (differenzierbare) Fkt f ist Stammfkt ihrer Ableitung f', deshalb

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

- mit F ist auch $F + c$ Stammfkt. von f
- alternative Schreibweise:

$$F(x) = \underbrace{\int f(x)\,dx}$$

„unbestimmtes Integral von f"

F Stammfunktion von f

- sehr hilfreich beim Integrieren ist eine Liste von Stammfunktionen elementarer Funktionen:

Integrieren ↓	f	$x^n,\ n \neq -1$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$1/x$	$\dots$	↑ Ableiten
	F	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dots$	

$\rightarrow$ z.B.: 1) $\displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ ✓

2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ ✓

3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$

Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \overset{!}{=} f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\Big\lceil \text{denn } \int_a^b f'g\,dx = \int_a^b \{(f\cdot g)' - f g'\}\,dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f g'\,dx \Big\rfloor$$

Substitution

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\,g'(y)\,dy$$

wobei $g: [g^{-1}(a), g^{-1}(b)] \to [a,b]$

beliebige umkehrbare, diff.bare Fkt

$\lceil$ denn

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(g(g^{-1}(b))) - F(g(g^{-1}(a)))$$

$F' = f$

$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (F(g(y)))'\,dy = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))\,g'(y)\,dy \rfloor$$

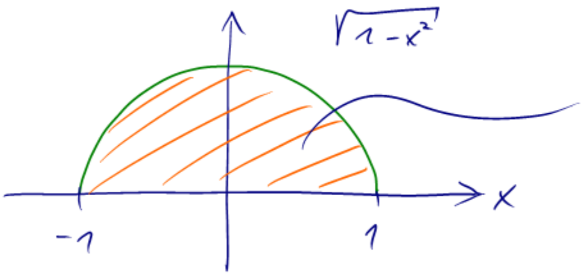
Beispiele

1) $$\int_a^b x e^x \, dx \overset{P.I.}{=} x e^x \Big|_a^b - \int_a^b e^x \, dx = (x-1) e^x \Big|_a^b$$

2) $$\int_a^b \cos^2 x \, dx \overset{P.I.}{=} \sin x \cos x \Big|_a^b + \underbrace{\int_a^b \sin^2 x \, dx}_{= \; x\big|_a^b - \int_a^b \cos^2 x \, dx}$$

$$\rightarrow \quad \int_a^b \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \Big|_a^b$$

3) Flächeninhalt einer Kreisscheibe:



$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\varphi} \, \cos\varphi \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

Substit.: $x = \sin\varphi$, $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$

$$\underset{2)}{=} \frac{1}{2} (\varphi + \sin\varphi \cos\varphi) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2 \quad \checkmark$$