Integration der Potenzreihe:

Bsp.:
$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^b \frac{1}{x}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}\, x^{2\ell+1}\right) dx$$
$$= \int_0^b \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!}\, x^{2\ell}\, dx$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} \underbrace{\int_0^b x^{2\ell}\, dx}_{= \left.\frac{x^{2\ell+1}}{2\ell+1}\right|_0^b}$$

d. h.
$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!\; 2\ell+1}\, b^{2\ell+1}$$
$$= b - \frac{1}{3!\,3} b^3 + \frac{1}{5!\,5} b^5 - \cdots + \cdots$$

Integration mittels Parameterableitung:

$$\int_a^b \left(\frac{d}{d\lambda} f_\lambda(x)\right) dx \overset{!}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(\int_a^b f_\lambda(x)\, dx\right)$$

Bsp.:
$$\int_a^b x\, e^{-x}\, dx = \int_a^b \left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda x}\right)_{\lambda=-1} dx \overset{!}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(\int_a^b e^{\lambda x}\, dx\right)_{\lambda=-1}$$
$$= \left.\left(\frac{d}{d\lambda} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\right)_{\lambda=-1}\right|_a^b = \left. -x e^{-x} - e^{-x}\right|_a^b = \left. -(1+x)\, e^{-x}\right|_a^b$$

Def.: Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

für $f:]x_0, b] \to \mathbb{R}$:

$$\int_{x_0}^b f(x)\,dx := \lim_{a\searrow x_0} \int_a^b f(x)\,dx$$

Beispiele:

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1$$

- $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\searrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\searrow 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2$$

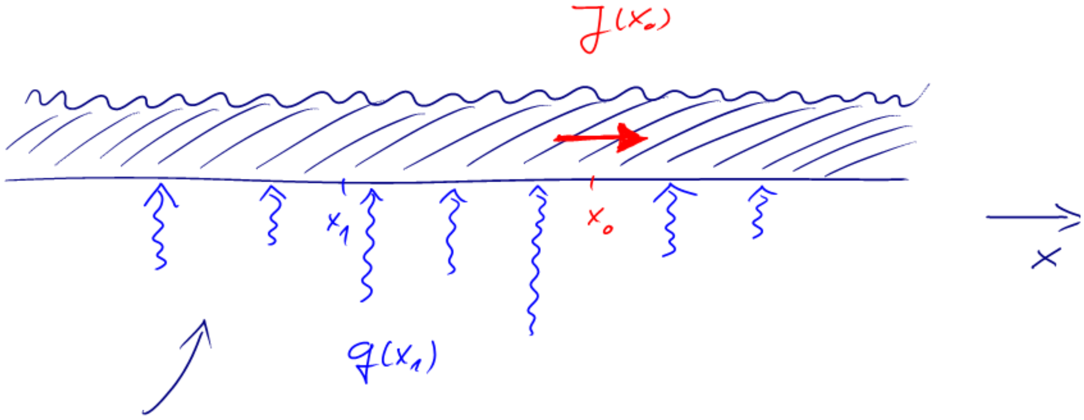
zum Abschluss:

HDI als hydrodynamische Identität

$$\hookrightarrow \quad \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{gegeben durch } f \text{ auf Intervall } [a,b]} \overset{!}{=} \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{gegeben durch } F \text{ bei Grenzen } (\hat{=}\text{ Rand}) \text{ des Intervalls } [a,b]} \qquad (F' = f)$$

Weshalb kann „globale" Größe $\int_a^b f(x)\,dx$ durch „lokale" Größen $F(a)$, $F(b)$ bestimmt werden?

Analogie: Wasserströmung im Kanal:



eindringendes Grundwasser der Quellstärke $q(x)$

- $J(x)$ = lokaler (Volumen) Strom bei x = $\dfrac{\Delta V_x}{\Delta t}$
- $q(x)$ = lokale Quellstärke bei x = $\dfrac{\Delta V_x}{\Delta l\, \Delta t}$

Strömung stationär und inkompressibel

$$\rightarrow \quad \underbrace{q(x)\,\Delta l}_{\text{pro Zeiteinheit in } [x,\, x+\Delta l] \text{ eindringendes Grundwasser-volumen}} \overset{!}{=} \underbrace{J(x+\Delta l) - J(x)}_{\text{pro Zeiteinheit aus } [x,\, x+\Delta l] \text{ abfließendes Kanalwasser-volumen}}$$

d.h. $\quad q(x) = \dfrac{1}{\Delta l}\left(J(x+\Delta l) - J(x)\right)$

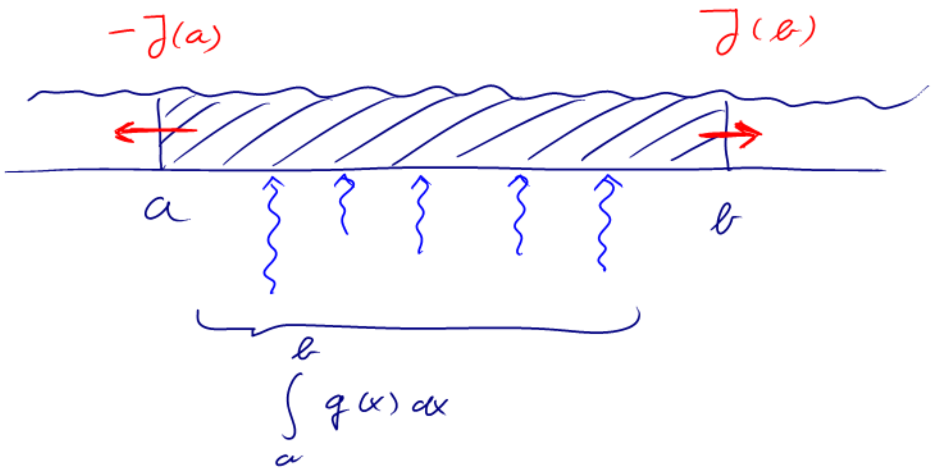
mathematisch idealisiert also

$$q(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(J(x+h) - J(x)\right) \equiv J'(x) \quad !$$

in diesem Kontext: $J'(x) =: \mathrm{div}\, J(x)$:

„ Divergenz ($\equiv$ Quellstärke) von J bei x"

betrachte nun Kanalstrecke von $x=a$ bis $x=b$:



- aus Strecke $[a,b]$ abfließender Volumenstrom:

$$I_{ab} = J(b) - J(a)$$

- in Strecke $[a,b]$ einfließender Volumenstrom:

$$I_{ein} = \sum_{\ell} q(x_\ell) h_\ell \equiv \int_a^b q(x)\,dx$$

jedes Kind weiß: $I_{ein} \overset{!}{=} I_{ab}$

deshalb $\int_a^b q(x) \overset{!}{=} J(b) - J(a) \quad \Longleftrightarrow \quad$ HDI

$q \equiv f,\ J \equiv F$