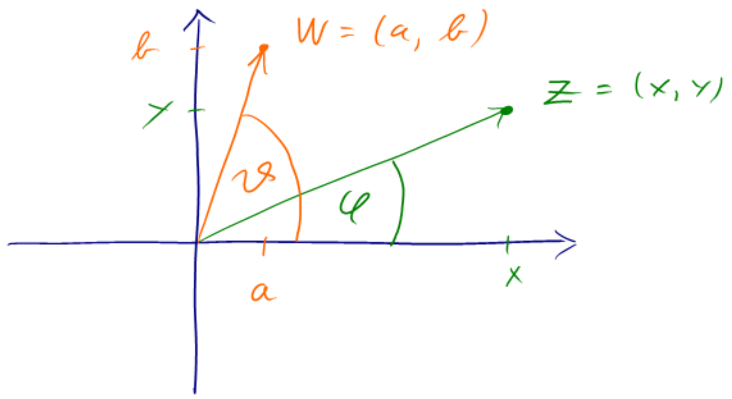
Komplexe Zahlen

hier: geometrischer Zugang

komplexe Zahl $z = (x, y) \left(\equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2$,

d.h. z insbesondere 2-dim reeller Vektor:



- Realteil von $z = (x, y)$: $\boxed{\operatorname{Re} z := x}$
- Imaginärteil " ": $\boxed{\operatorname{Im} z := y}$
- Betrag (auch: Modul): $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$
- Argument (auch: Phase): $\arg z := \varphi = \sphericalangle((1,0), z)$

  $\varphi \in [0, 2\pi[$

$\to$ Polardarstellung von z:

$$\boxed{z = |z| (\cos\varphi, \sin\varphi)} \qquad (\varphi = \arg z)$$

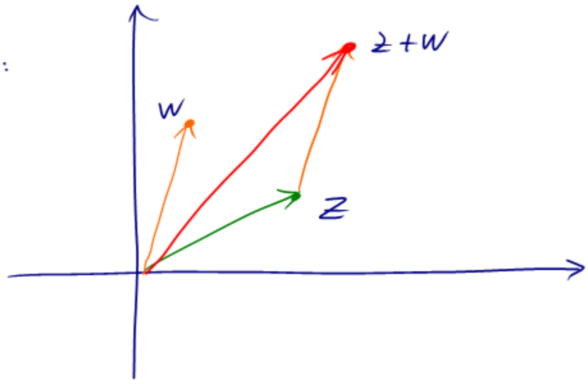
((reelle) Skalarmultiplikation des $\mathbb{R}^2$)

- Menge aller komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

- <u>komplexe Addition</u> $\equiv$ Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$, d.h.

für $z = (x, y)$, $w = (a, b)$: $\boxed{z + w = (x+a,\ y+b)}$

geometrisch:



komplexe Addition erfüllt damit die bekannten Gesetze der Vektoraddition; insbesondere ist $(\mathbb{C}, +)$ abelsche Gruppe.

- <u>komplexe Multiplikation</u>

$z = (x, y)$, $w = (a, b)$, dann

$$\boxed{z \cdot w := (xa - yb,\ xb + ya)} \qquad (1)$$

offenbar gilt:

- $z \cdot w = w \cdot z$
- $(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 w$ (<u>Distributivgesetz</u>)
- $(\lambda z) w = z (\lambda w) = \lambda (z \cdot w)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

<u>geometrische Bedeutung</u>:

sei $\varphi = \arg z$, $\vartheta = \arg w$, dann

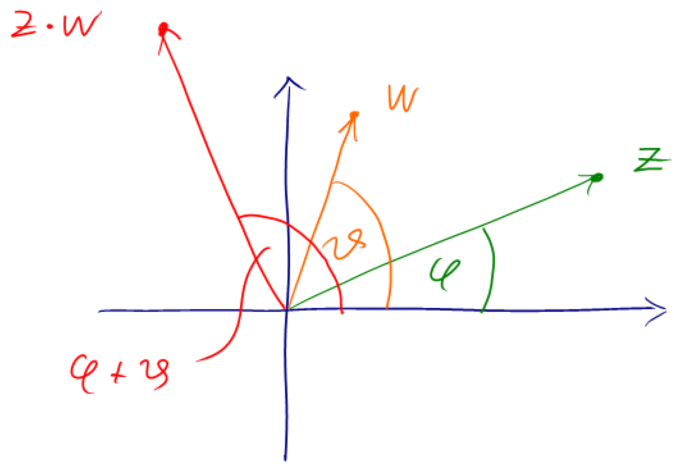
$z = |z| (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $w = |w| (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$\rightarrow$ $z \cdot w = |z| |w| (\cos\varphi, \sin\varphi) \cdot (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$$= |z||w| \left(\underbrace{\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta}_{= \cos(\varphi+\vartheta)} , \underbrace{\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\cos\vartheta}_{= \sin(\varphi+\vartheta)} \right)$$

d.h.

$$\boxed{\begin{array}{ll} (a) & |z \cdot w| = |z|\,|w| \\ (b) & \arg(z\cdot w) = \arg z + \arg w \end{array}} \qquad (2)$$



z.B.:

$$(1,1)\,(1,1) = (0,2)$$

$$(0,1)\,(0,1) = (-1,0)$$

$$(0,1)\,(0,-1) = (+1,0)$$

mittels Def. (1) oder geom. Bedeutung (2) zeigt sich leicht:

(i) $z\cdot(w\cdot u) = (z\cdot w)\cdot u$: <u>Assoziativität</u>

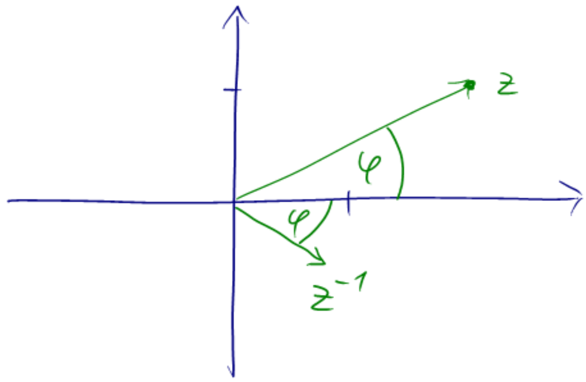
(ii) $z\cdot(1,0) = z$, d.h. <u>$(1,0)$ neutrales Element</u>

(iii) für $z \neq (0,0)$ sei w gegeben durch $|w| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg w = -\arg z$ $(+2\pi)$; dann offenbar

$$z \cdot w = w \cdot z = (1, 0)$$

d.h. jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ besitzt ein Inverses $\in \mathbb{C}$

geometrisch:



(iv) $z \cdot w = w \cdot z$

d.h.: • $(\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, \text{„}\cdot\text{"})$ abelsche Gruppe

<u>zudem</u> • $(\mathbb{C}, \text{„}+\text{"})$ abelsch Gruppe (als VR ...)

• $(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 w + z_2 w$ (Distributivgesetz)

$\rightarrow$ $(\mathbb{C}, \text{„}+\text{"}, \text{„}\cdot\text{"})$ ist ein <u>Körper</u>, wie etwa auch $(\mathbb{R}, \text{„}+\text{"}, \text{„}\cdot\text{"})$

das bedeutet <u>praktisch</u>: mit komplexen Zahlen rechnet man genau wie mit reellen Zahlen! (s.u.)

<u>Reelle Zahlen als Teilmenge der komplexen Zahlen, imaginäre Einheit i</u>

wegen $(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0)$

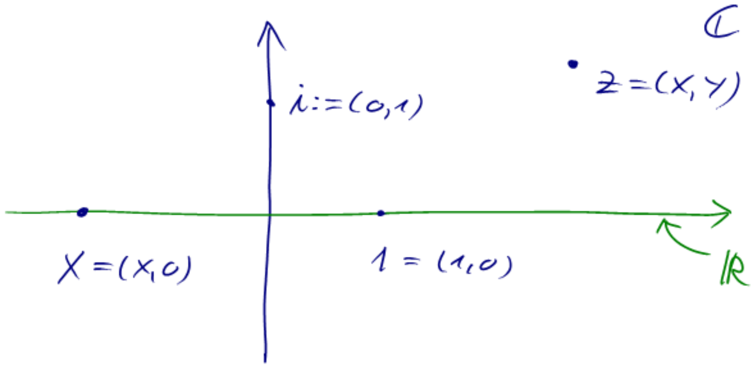
und $(x, 0) \cdot (a, 0) = (xa, 0)$

entsprechen komplexe Zahlen mit verschwindendem Imaginärteil genau den reellen Zahlen

→ identifiziere $\mathbb{R} \ni x = (x,0) \in \mathbb{C}$

damit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

reelle Achse — komplexe Ebene

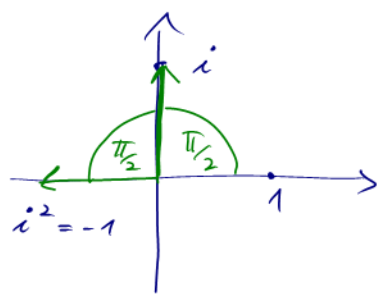


insbes.: $1 = (1,0)$

zweckmäßig: $i := (0,1)$: „imaginäre Einheit"

→ $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

$$\boxed{i^2 = -1}$$



damit schreiben wir:

$$\boxed{z = (x,y) = x\overbrace{(1,0)}^{1} + y\overbrace{(0,1)}^{i} = x + iy} \quad (*)$$

Realteil

Imaginärteil von z

unter Beachtung von $i^2 = -1$ und Darstellung (*)

können wir in $\mathbb{C}$ wie gewohnt rechnen:

etwa: sei $z = x + iy$

$w = a + ib$

$$\to \quad \bullet \quad z + w = x + iy + a + ib = (x+a) + i(y+b)$$

$$\bullet \quad z \cdot w = (x+iy)(a+ib) = xa + ixb + iya + \underbrace{i^2}_{=-1} yb$$

$$= (xa - yb) + i(xb + ya)$$

u.s.w.

wegen $i^2 = -1$ schreiben wir auch

$$\boxed{i \equiv \sqrt{-1}}$$

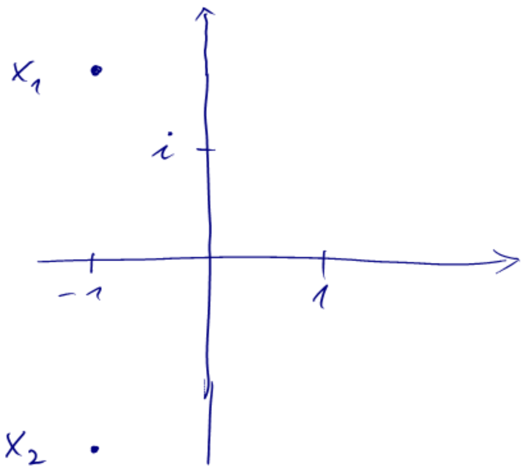
und rechnen etwa beim Lösen quadratischer Gleichungen:

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+1)^2 = -2$$

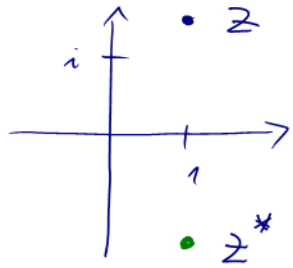
$$\to \text{ Lösungen } \quad x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm \underbrace{\sqrt{-1}}_{=i} \sqrt{2}$$

$$= -1 \pm i\sqrt{2}$$



- <u>komplexe Konjugation</u> von $z = (x, y) = x + iy$:

$$\boxed{z^* := (x, -y) = x - iy}$$



insbesondere: $\boxed{i^* = -i}$

<u>Anwendungen:</u> $(z = x + iy)$

1) $z = z^* \iff z$ <u>reell</u>, d.h. $\operatorname{Im} z = 0$

$z = -z^* \iff z$ <u>rein imaginär</u>,

d.h. $\operatorname{Re} z = 0$

2) $z + z^* = x + iy + x - iy = 2x$,

d.h. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$

$z - z^* = x + iy - (x - iy) = 2iy$,

d.h. $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

3) $z^* z = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

$$\boxed{z^* z = |z|^2}$$

4) $$\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

<u>Offenbar gilt:</u>

$$\boxed{(z + w)^* = z^* + w^*, \quad (zw)^* = z^* w^*, \quad \left(\frac{1}{z}\right)^* = \frac{1}{z^*}.}$$

Komplexe Exponentialfunktion:

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

erfüllt $\quad e^{z+w} = e^z e^w \qquad (1)$

$$\boxed{e^{x+iy} = ?}$$

$$\underset{(1)}{=} \underset{\checkmark}{e^x}\, \underset{?}{e^{iy}}$$

$\rightarrow \quad e^{iy} \overset{\text{Def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iy)^n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\ell)!} (iy)^{2\ell} + \frac{1}{(2\ell+1)!} (iy)^{2\ell+1} \right)$

mit $\quad i^{2\ell} = (i^2)^\ell = (-1)^\ell$

$\quad\quad\; i^{2\ell+1} = i\, i^{2\ell} = i(-1)^\ell$

erhalten wir:

$$e^{iy} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} y^{2\ell}}_{= \cos y} + i \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} y^{2\ell+1}}_{= \sin y}$$

$\rightarrow$ Euler-Identität: $\qquad (\varphi \in \mathbb{R})$

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$

$\rightarrow$ Polardarstellung: $\quad \boxed{z = |z| e^{i\varphi}}, \quad \varphi = \arg z$

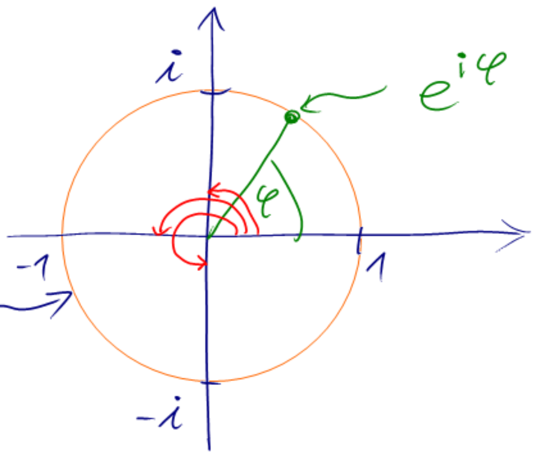
→ <u>Additionstheoreme für sin und cos:</u>

$$\underline{\cos(\varphi+\vartheta)} + i\,\underline{\sin(\varphi+\vartheta)} \overset{\text{E.I.}}{=} e^{i(\varphi+\vartheta)} = e^{i\varphi}e^{i\vartheta} \overset{\text{E.I.}}{=} (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$= \underbrace{\boxed{(\cos\varphi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\vartheta)}}_{\cos(\varphi+\vartheta)} + i\,\underbrace{\boxed{(\cos\varphi\sin\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta)}}_{\sin(\varphi+\vartheta)} .$$

→ $$\boxed{e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)}$$

→



komplexer Einheitskreis

insbes.:

$$i = e^{i\pi/2}$$
$$-1 = e^{i\pi}$$
$$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$1 = e^{0} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i} = \dots \; !$$

→ <u>n-te Einheitswurzeln</u> ≡ Lösungen der Gl. $\boxed{z^n = 1}$

<u>Ansatz</u>: $z = e^{i\varphi}$, → $e^{i\varphi n} = 1$

erfüllt für $\varphi n = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

→ $\varphi = \dfrac{2\pi k}{n}$

→ n-ten Einheitswurzeln sind genau

$$\{\, e^{i\,2\pi\ell/n} \mid \ell = 0, 1, 2, \dots, n-1 \,\} \subset \mathbb{C}$$