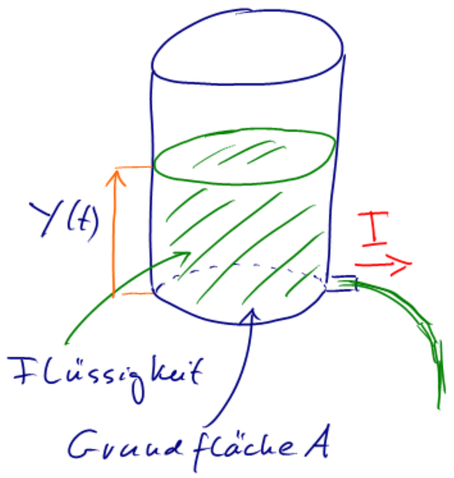
Differenzialgleichungen

z.B. benötigt zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines physikalischen Zustands: Newton-Gleichung, Schrödinger-Gleichung, Wellengleichung, Diffusionsgleichung ...

Sehr einfaches Beispiel: auslaufender Behälter:



Zustand ≡ Höhe $Y(t)$ des Flüssigkeitsspiegels zur Zeit t

Zustandsänderung durch auslaufenden Volumenstrom

$$I(t) \equiv -\left.\frac{\Delta V}{\Delta t}\right|_t \equiv -\dot{V}(t),$$

mit $V(t) = A\,Y(t)$ also

$$\boxed{\dot{Y}(t) = -\frac{1}{A}\, I(t)} \qquad (1)$$

Strom $I(t)$ seinerseits durch Druck p (am Behälterboden) und damit durch Höhe $Y(t)$ bestimmt:

$$\boxed{I(t) = f(Y(t))} \qquad (2)$$

funktionaler Zusammenhang von Höhe Y und Strom I hängt von den Gegebenheiten ab:

etwa:

a) auslaufende Regentonne: $f(y) = \alpha \sqrt{y}$ (Bernoulli)

(Wasser $\simeq$ ideale Flüssigkeit)

b) auslaufender Honigtopf: $f(y) = \beta\, y$ (Hagen-Poisseuille)

(Honig = Flüssigkeit hoher Viskosität)

Gleichungen (1) und (2) ergeben „dynamisches Gesetz":

$$\boxed{\dot{y}(t) \overset{!}{=} -f(y(t))} \quad (3) \qquad (A \equiv 1)$$

Differenzialgleichung erster Ordnung zur Bestimmung von $y(t)$

Aufgabe: bestimme Funktion $y(t)$ so, dass

1) $y(0) \overset{!}{=} y_0$: vorgegebene Höhe bei $t=0$

2) für alle Zeiten $t \geq 0$: $\dot{y}(t) \overset{!}{=} -f(y(t))$

(Anfangswertproblem)

- Existenz und Eindeutigkeit einer Fkt $y(t)$ mit Eigenschaften 1) und 2) gesichert falls (z.B.) $f(y)$ diff.bar und f' beschränkt. (vgl. Analysis)

Wie bestimmt man $y(t)$? $\longrightarrow$

• Numerisch mittels Euler-Verfahren:

für hinreichend kleines $\Delta t > 0$ ist

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \underset{(3)}{\overset{!}{=}} -f(y(t))$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y(t) \xrightarrow{\Delta t} y(t+\Delta t) = y(t) - f(y(t))\Delta t} \qquad (4)$$

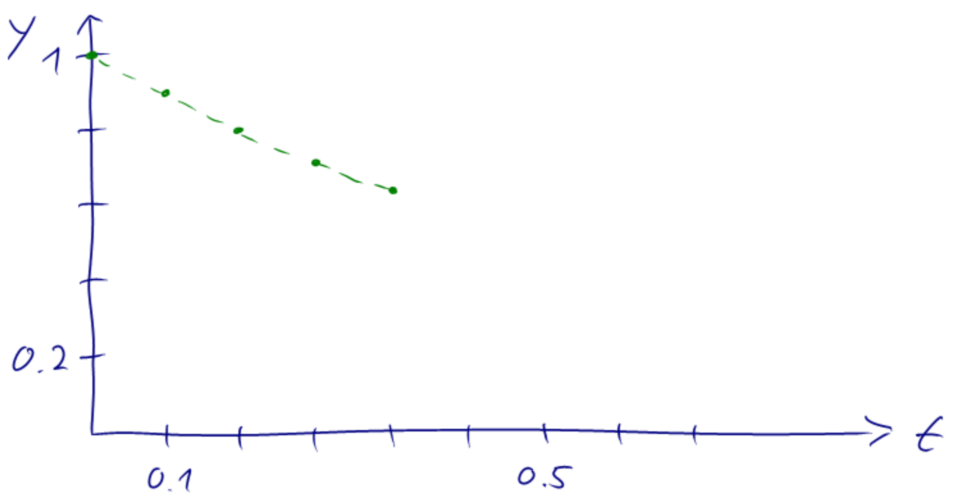
n-fache Iteration von (4) mit $y(0) = y_0$ ergibt

Näherung für gesuchte Lösung $y(t)$ zur Zeit $t = n\Delta t$.

z.B. für $f(y) = \beta y$, $\beta = 1$, $\Delta t = 0.1$, $y_0 = 1$

(in geeigneten Einheiten):

			e^{-t}
$y(0)$	$= 1$		1
$y(0.1)$	$= 1 - 0.1$	$= 0.9$	0.90
$y(0.2)$	$= 0.9 - 0.09$	$= 0.81$	0.82
$y(0.3)$	$= 0.81 - 0.08$	$= 0.73$	0.74
$y(0.4)$	$= 0.73 - 0.07$	$= 0.66$	0.67
$\vdots$			$\vdots$



- <u>analytisch</u> z.B. durch <u>Raten</u> einer <u>allg.</u> Lösung:

$$y_c(t) \overset{!}{=} c\, e^{-\beta t}$$

↳ freier Parameter

$$\rightarrow \quad \dot{y}_c(t) = -\beta \underbrace{c\, e^{-\beta t}}_{= y_c(t)} = -\beta\, y_c(t)$$

offenbar Lösung der DGL $\dot{y}(t) = -\beta\, y(t)$ ✓

mit $y_c(0) = c$

d.h. $\boxed{y(t) = y_0\, e^{-\beta t}}$ <u>ist</u> die gesuchte Lösung.

<u>allgemeiner:</u>

<u>Definition</u>

Die <u>Funktion</u> $y(x)$ ist (spezielle) <u>Lösung</u> der <u>Differenzialgleichung</u> (DGL)

$$y'(x) = f(y(x), x)$$

zum <u>Anfangswert</u> y_0 bei $x = x_0$ g.d.w.

(i) $y(x_0) \overset{!}{=} y_0$

(ii) $y'(x) \overset{!}{=} f(y(x), x)$ für <u>alle</u> x.

Eine <u>allgemeine</u> Lösung $y_c(x)$ der DGL enthält einen freien Parameter c.

- genäherte numerische Lösung mittels Euler-Verfahren:

$$y(x) \xrightarrow{\Delta x} y(x+\Delta x) = y(x) + f(y(x),x)\,\Delta x$$

✓

- analytische Verfahren zumindest für einige Typen von DGLen:

- „triviale" DGL: $\boxed{y'(x) = f(x)}$

→ Lösung zum Anfangswert y_0 bei x_0:

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(u)\,du}$$

⌈ denn offenbar $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x)$ nach HDI. ⌋

- separierbare DGL: $\boxed{y'(x) = g(x)\cdot h(y(x))}$

→ Lösung $y(x)$ zum AW y_0 bei x_0 bestimmt durch „Trennung der Variablen":

$$\boxed{\int_{y_0}^{\boxed{y(x)}} \frac{dy}{h(y)} \overset{!}{=} \int_{x_0}^{\boxed{x}} g(u)\,du} \qquad (5)$$

⌈ Memo:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \;\rightarrow\; \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx \;\rightarrow\; \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$ ⌋

1) $x = x_0$: $\rightarrow \displaystyle\int_{y_0}^{y(x_0)} \frac{dy}{h(y)} = 0 \rightarrow y(x_0) = y_0$ ✓

2) Ableitung von Gl. (5) nach x ergibt nach HDI und Kettenregel

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} \stackrel{!}{=} g(x) \quad ✓$$

- <u>homogene lineare DGL (1. ter Ordnung)</u> :

$$\boxed{y'(x) = g(x)\, y(x)}$$

$\rightarrow$ Lösung zum AW y_0 bei x_0 :

$$\boxed{y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} g(u)\, du}}$$

$y(x_0) \stackrel{!}{=} y_0$ ✓ ; $y'(x) \stackrel{!}{=} g(x) \cdot y(x)$ ✓

Spezialfall : $g(x) = c$: $\boxed{y'(x) = c\, y(x)}$

$$\rightarrow \boxed{y(x) = y_0\, e^{c(x - x_0)}}$$