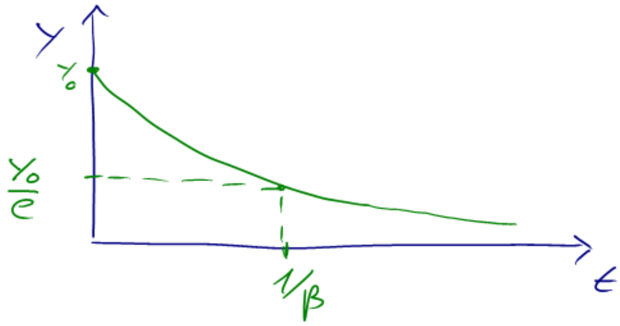
Beispiele

1) auslaufender Honigtopf: $\dot{y}(t) = -\beta\, y(t)$ (s.o.)

$(x \equiv t)$

homogene, lineare DGL

$\rightarrow \quad y(t) = y_0\, e^{-\beta t}$:



2) auslaufender Wasserbehälter: $\dot{y}(t) = \underbrace{-\alpha}_{g(t)} \underbrace{\sqrt{y(t)}}_{h(y(t))}$ (s.o.)

separierbare DGL

$\rightarrow$ $y(t)$ zum AW y_0 bei $t=0$ bestimmt durch:

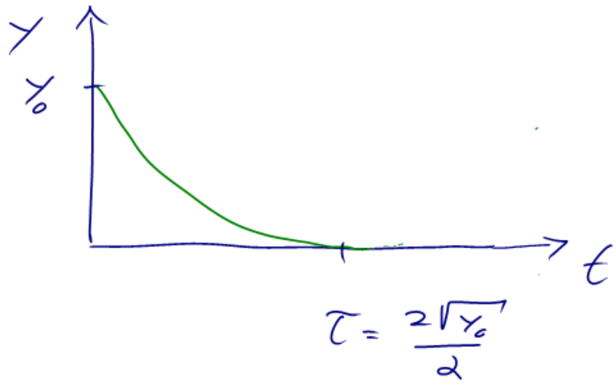
$$\underbrace{2\sqrt{y}\,\Big|_{y_0}^{y(t)}}_{=\,2\left(\sqrt{y(t)} - \sqrt{y_0}\right)} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{y}} \overset{!}{=} \int_0^t (-\alpha)\, du = -\alpha t$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y(t) = \left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{2} t\right)^2}$$

Test: (i) $y(0) = \left(\sqrt{y_0} - 0\right)^2 = y_0$, ✓

(ii) $\dot{y}(t) = \cancel{2}\underbrace{\left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{2} t\right)}_{=} \cdot \left(-\frac{\alpha}{\cancel{2}}\right)$

$= -\alpha \sqrt{y(t)}$ ✓ .



3) auslaufender Honigtopf mit <u>zeitlich variablen Auslauf</u>:

$$f(Y, \underline{\underline{t}}) = +\beta \, \underline{\underline{e^{-\gamma t}}} \, Y$$

d.h. $$\boxed{\dot{Y}(t) = -\beta \, e^{-\gamma t} \, Y(t)}$$

↗ homogene, lineare DGL

$\longrightarrow$ $Y(t)$ zum AW Y_0 bei $t=0$ gegeben durch

$$Y(t) = Y_0 \, e^{-\beta \int_0^t e^{-\gamma u} \, du} \quad ;$$

mit $\int_0^t e^{-\gamma u} \, du = -\frac{e^{-\gamma u}}{\gamma}\Big|_0^t = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})$ also

$$\boxed{Y(t) = Y_0 \, e^{-\beta/\gamma \, (1 - e^{-\gamma t})}}$$

[Test: (i) $Y(0) = Y_0 \, e^{-\beta/\gamma (1 - e^{-0})} = Y_0$ ✓

(ii) $\dot{Y}(t) = \underbrace{-Y_0 \, \beta \, e^{-\gamma t} \, e^{-\beta/\gamma (1 - e^{-\gamma t})}}$

$= -\beta e^{-\gamma t} \, Y(t)$ ✓]

(beachte: $\lim_{t \to \infty} Y(t) = Y_0 \, e^{-\beta/\gamma} > 0$!)

4) auslaufender Honigtopf mit zeitlich variablen Zulauf:

$$\dot{y}(t) = -\beta\, y(t) + f(t)$$

falls $f(t) = c \;\rightarrow$ separierbare DGL ✓

für allg. $f(t)$ liegt ein neuer DGL-Typ vor:

Inhomogene, lineare DGL:

$$\boxed{y'(x) = g(x)\, y(x) + f(x)} \qquad (1)$$

Inhomogenität

Lösungsmethode:

- bestimme spezielle Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen DGL (zu einem bel. gewählten Anfangswert)

- bestimme allgemeine Lösung $y_a(x)$ der homogenen DGL

$$y'(x) = g(x)\, y(x) \qquad (2)$$

$\rightarrow$ $y(x) := y_s(x) + y_a(x)$ ist allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

[denn $y'(x) = y_s'(x) + y_a'(x) = g(x)\, y_s(x) + f(x) + g(x)\, y_a(x)$

$= g(x)\,(y_s(x) + y_a(x)) + f(x) = g(x)\, y(x) + f(x)$]

zurück zum Beispiel 4) : $\dot{Y}(t) = -\beta Y(t) + f(t)$

$(x \equiv t)$

zuerst konstanter Zulauf : $f(t) = f_0 \rightarrow \dot{Y}(t) = -\beta Y(t) + f_0$

$$\dot{Y}(t) = -\beta Y(t) + f_0 \,, \quad \text{separierbare DGL}$$

$$\rightarrow \quad \int_{Y_0}^{Y(t)} \frac{dy}{f_0 - \beta Y} = \int_0^t 1 \, du = t$$

$$\text{l.s.} = -\frac{1}{\beta} \ln (f_0 - \beta y) \Big|_{Y_0}^{Y(t)} = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{f_0 - \beta Y(t)}{f_0 - \beta Y_0} \right) = t$$

$$\rightarrow \quad f_0/_\beta - Y(t) = \left(f_0/_\beta - Y_0 \right) e^{-\beta t}$$

d.h. $$Y(t) = f_0/_\beta + \left(Y_0 - f_0/_\beta \right) e^{-\beta t}$$

Test. (i) $Y(0) = Y_0$ ✓ ;

(ii) $Y'(t) = -\beta (Y_0 - f_0/_\beta) e^{-\beta t}$

$$= -\beta \Big(\underbrace{(Y_0 - f_0/_\beta) e^{-\beta t} + f_0/_\beta}_{= Y(t)} \Big) + f_0 \quad ✓$$

alternativ (und etwas einfacher):

- $Y_s(t) = f_0/_\beta$ offenbar spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\dot{Y}(t) = -\beta Y(t) + f_0$

- $Y_a(t) = c\, e^{-\beta t}$ behauptlich allgemeine Lösung der homogenen DGL $\dot{Y}(t) = -\beta Y(t)$

$\rightarrow \quad y(t) = f_0/\beta + c\,e^{-\beta t}$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

mit $c = y_0 - f_0/\beta$ ist $y(0) = y_0$ und

$$y(t) = f_0/\beta + (y_0 - f_0/\beta)\,e^{-\beta t} \quad \checkmark$$

(wie zuvor)

für allg. Funktion $f(t)$ ist die Bestimmung einer speziellen Lösung möglich mittels

„Variation der Konstanten":

allg. inhomogene, lineare DGL

$$y'(x) = g(x)\,y(x) + f(x) \qquad (1)$$

$\rightarrow$ homogene DGL $y'(x) = g(x)\,y(x)$ besitzt Lösung

$$y_c(x) = c\,e^{\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,d\tilde{x}} \qquad \text{(s. o.)}$$

Ansatz für spezielle Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen DGL (1):

$$y_s(x) = c(x)\,e^{\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\,d\tilde{x}}$$

d.h. Konstante c der homog. Lösung y_c wird ersetzt durch variable Fkt $c(x)$;

Ableiten nach x ergibt mit DGL (1) eine neue DGL zur Bestimmung von $c(x)$:

$$y_s'(x) = \left(c(x)\, g(x) + c'(x)\right) e^{\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x}}$$

$$\overset{(1)}{=} g(x) \underbrace{\left(c(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x}}\right)}_{y_s(x)} + f(x)$$

Gleichung erfüllt wenn

$$\boxed{c'(x) = f(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} g(\tilde{x})\, d\tilde{x}}}$$

triviale DGL, gelöst durch Integration ✓