Differenzialgleichung n-ter Ordnung :

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f\left(y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), x \right)}$$

- allgemeine Lösung enthält n freie Parameter
- eindeutige Lösung z.B für vorgegebene Werte

$$y(x_0),\quad y^{(1)}(x_0),\quad y^{(2)}(x_0), \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)$$

Lösungsmethoden

numerisch mittels verallgemeinerten Euler-Verfahren:

(betrachte endliche Differenzenquotienten für $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, …
$y^{(1)}$.)

$$y^{(n-1)}(x+\Delta x) = y^{(n-1)}(x) + f\left(y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x), x\right)\Delta x$$

$$y^{(n-2)}(x+\Delta x) = y^{(n-2)}(x) + y^{(n-1)}(x)\,\Delta x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y^{(1)}(x)\,\Delta x$$

- analytisch für homogene, lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$\boxed{a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y^{(1)}(x) + a_0 y(x) \overset{!}{=} 0} \qquad (1)$$

mittels Exponential-Ansatz: $\boxed{y(x) = e^{\lambda x}}$ (2)

mit $y^{(\ell)}(x) = \lambda^{\ell} e^{\lambda x}$ ergibt (2) in (1):

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0)\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

d.h.

> $e^{\lambda x}$ ist Lösung der DGL (1) g.d.w.
>
> λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms
>
> $$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 .$$

Fundamentalsatz der Algebra impliziert:

$p(\lambda)$ besitzt genau n Nullstellen (Vielfachheiten mitgezählt) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

- Falls λ_ℓ paarweise verschieden:

  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ sind linear unabhängige Lösungen der DGL (1),

  $$\rightarrow \quad y(x) = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \, e^{\lambda_\ell x} \quad \text{ist allgemeine Lsg.}$$

  der DGL (1).

- ist λ_ℓ Nullstelle der Vielfachheit m, so sind

  $$e^{\lambda_\ell x}, \; x e^{\lambda_\ell x}, \; x^2 e^{\lambda_\ell x}, \; \dots, \; x^{m-1} e^{\lambda_\ell x}$$

  linear unabhängige Lsgen der DGL (1)

⌈ denn dann $P(\lambda) = Q(\lambda)\,(\lambda_e - \lambda)^m$,

← Polynom vom Grad $n-m$

$\rightarrow$ DGL (1) $\Leftrightarrow$ $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\lambda_e - \frac{\partial}{\partial x}\right)^m y(x) = 0$

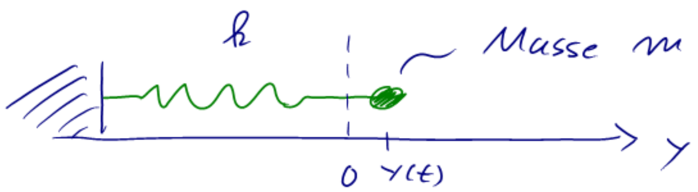
nun überlegt man sich, dass $\left(\lambda_e - \frac{\partial}{\partial x}\right)^m x^l e^{\lambda_e x} = 0$

solange $l \leq m-1$ und sieht so, dass $e^{\lambda_e x}$, $x e^{\lambda_e x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda_e x}$ Lsgen der DGL (1) ⌋

<u>beachte</u>: auch für <u>reelle</u> Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $P(\lambda)$ i. A. <u>komplex</u>;

dann aber <u>$\mathrm{Re}\, e^{\lambda_e x}$</u> und <u>$\mathrm{Im}\, e^{\lambda_e x}$</u> offenbar <u>reelle</u> Lösungen.

<u>Beispiel</u>: <u>Bewegungsgleichung des gedämpften, harmonischen Oszillators</u>:



(siehe Experimentalphysik 1)

<u>Federkraft</u>: $F(y) = -ky$

<u>Reibungskraft</u>: $F_r(\dot{y}) = -\underbrace{\gamma m}\,\dot{y}$ (Stokes)

└ Dämpfungskoeffizient

$\longrightarrow$ <u>Newtonsche Bewegungsgleichung</u>:

$$m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + F_r(\dot{y}(t)) = -k\,y(t) - \gamma m \dot{y}(t)$$

d.h. $$\boxed{\ddot{y}(t) + \gamma\,\dot{y}(t) + \frac{k}{m}\,y(t) = 0}$$

Exponential-Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ führt auf charakt. Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m} \overset{!}{=} 0$$

d.h. Nullstellen bestimmt durch (quadr. Ergänzung):

$$\left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \overset{!}{=} \frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}$$

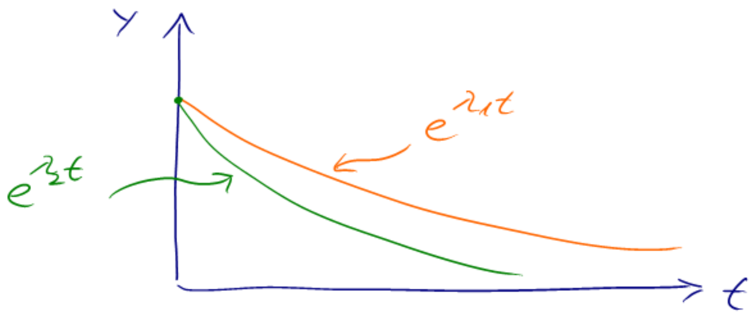
Fallunterscheidung:

1) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} > 0$, „starke Dämpfung":

$\rightarrow$ reelle Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}$,

also $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ und $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$ unabhängige Lösungen; allg. Lösung demnach

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t/2}\left(c_1 e^{+\sqrt{\cdots}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\cdots}\,t}\right)$$



2) $\underline{\dfrac{\gamma^2}{4} - \dfrac{k}{m} < 0}$, „schwache Dämpfung"

$$\to \quad \lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m}}_{<0}} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{(-1)\underbrace{\left(\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4}\right)}_{>0}}$$

d.h. $\lambda_{1/2} = -\dfrac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{\gamma^2}{4}}$

mit $\omega := \sqrt{k/m - \gamma^2/4}$ also $\lambda_{1/2} = -\dfrac{\gamma}{2} \pm i\omega$

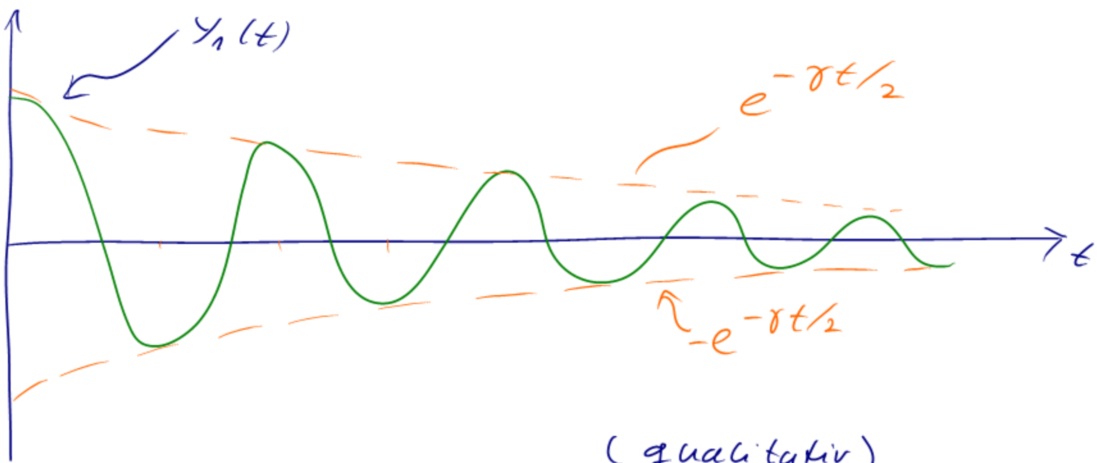
$\to$ unabhängige <u>komplexe</u> Lösungen:

$$y_1(t) = e^{-\gamma t/2}\, e^{+i\omega t} , \quad y_2(t) = e^{-\gamma t/2}\, e^{-i\omega t}$$

unabhängige <u>reelle</u> Lösungen z.B.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) &= \mathrm{Re}\, y_1(t) = e^{-\gamma t/2} \cos \omega t \\ \tilde{y}_2(t) &= \mathrm{Im}\, y_1(t) = e^{-\gamma t/2} \sin \omega t \end{aligned}} \qquad (*)$$

$\to$ allg. reelle Lösung: $\quad y(t) = e^{-\gamma t/2}\left(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\right)$



(<u>qualitativ</u>)

<u>gedämpfte Schwingung</u>

im Grenzfall $\gamma \to 0$ <u>ungedämpfte</u> Schwingung mit Frequenz $\omega_0 := \sqrt{k/m}$.

3) $\frac{\gamma^2}{4} - \frac{k}{m} = 0$, „Grenzfall“:

d.h. $P(\lambda) = \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4}$

$= (\lambda + \gamma/2)^2$

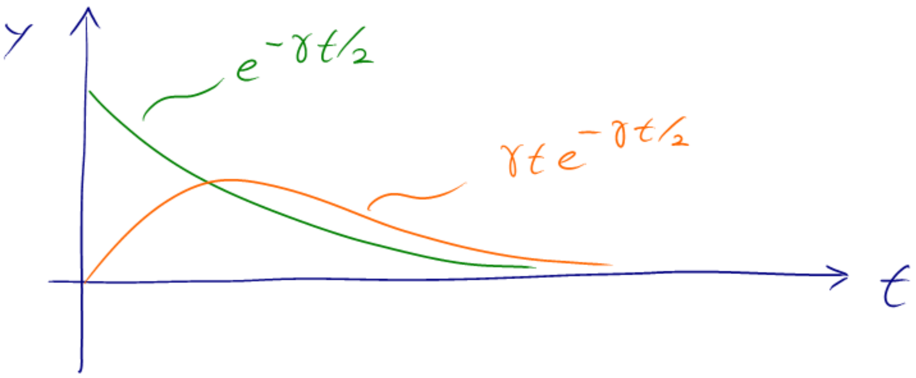
$\to$ $\lambda_1 = -\gamma/2$ ist doppelte Nullstelle von $P(\lambda)$

$\to$ unabhängige Lösungen: $y_1(t) = e^{-\gamma t/2}$

$y_2(t) = t\, e^{-\gamma t/2}$

<u>beachte</u>: hier fest gewähltes t gilt für $\omega \to 0$:

aus 2) $\begin{cases} \tilde{y}_1(t) = e^{-\gamma t/2} \cos\omega t \to e^{-\gamma t/2} = y_1(t). \\ \tilde{y}_2(t) = e^{-\gamma t/2} \sin\omega t \to \omega t\, e^{-\gamma t/2} = \omega\, y_2(t) \end{cases}$



(qualitativ)

Gedämpfter harmonischer Oszillator mit externer Kraft der Frequenz Ω :

$$F_{ex}(t) = f_0 m \cos \Omega t$$

→ Bewegungsgleichung:

$$(*) \quad \boxed{\ddot{y}(t) + \gamma \dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = f_0 \cos \Omega t} \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Lineare DGL 2.ter Ordnung mit Inhomogenität

allgemeine Lösung wieder Summe von allg. Lsg. der homogenen und speziellen Lsg. der inhomogenen DGL dargestellt werden.

$$y(t) = y_c(t) + y_s(t)$$

- $y_c(t)$ wie zuvor ✓
- Bestimmung von $y_s(t)$:

zweckmäßig: fasse $y_s(t)$ als Realteil einer speziellen Lösung $z_s(t)$ der DGL

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 e^{i\Omega t} \qquad (**)$$

auf (möglich, da $\gamma, \omega_0^2, f_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}\, e^{i\Omega t} = \cos \Omega t$)

Ansatz: $$z_s(t) = q\, e^{i\Omega t}, \qquad q \in \mathbb{C}$$

d.h. wir nutzen aus, dass Oszillator für $t \to \infty$

eine erzwungene Schwingung mit externer Frequenz Ω, Amplitude $|q|$ und Phasenverschiebung $-\varphi = \arg q$ ausführt.

$q \in \mathbb{C}$ bestimmt durch DGL:

$$z_s(t) = q\, e^{i\Omega t}$$
$$\hookrightarrow \dot{z}_s(t) = i\Omega q\, e^{i\Omega t}$$
$$\hookrightarrow \ddot{z}_s(t) = -\Omega^2 q\, e^{i\Omega t}$$

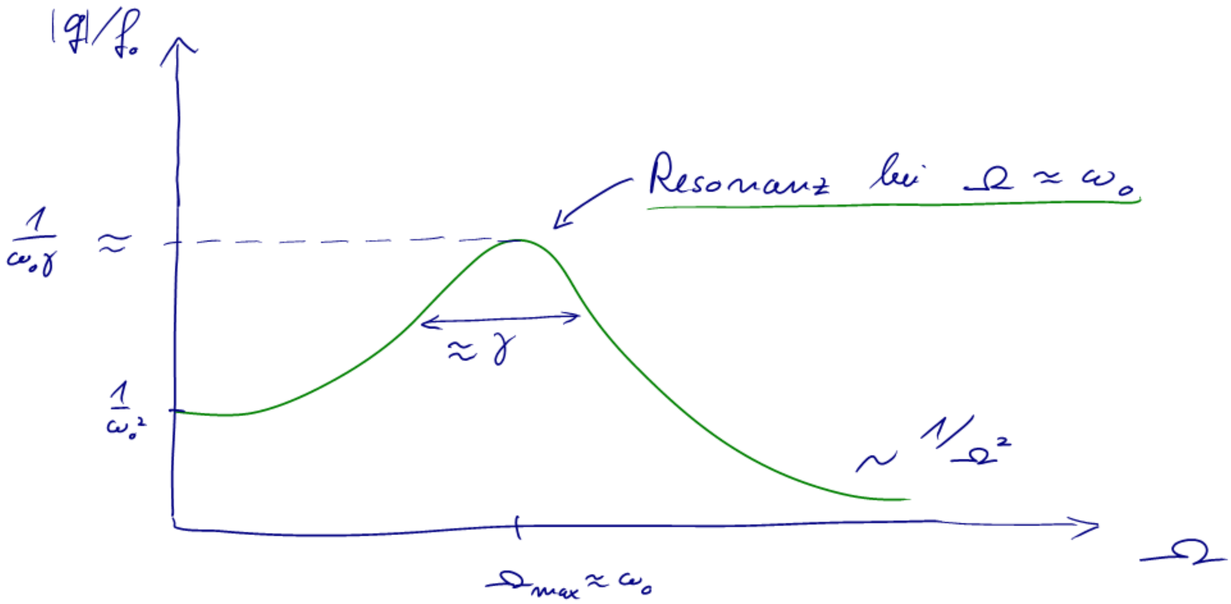
in (**) eingesetzt ergibt

$$(-\Omega^2 + i\Omega\gamma + \omega_0^2)\, q\, e^{i\Omega t} \overset{!}{=} f_0 e^{i\Omega t}$$

d.h.
$$q = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma}$$

$$\rightarrow \quad |q| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + \Omega^2\gamma^2}}$$

$$\varphi = -\arg q = \arccos \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + \Omega^2\gamma^2}}$$



Phasenverschiebung φ $\left(= -\arg q = \arccos \dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2 \right)^{1/2}} \right)$

$$y_s(t) = \mathrm{Re}\, z_s(t) = \mathrm{Re}\, |q| e^{-i\varphi} e^{i\Omega t}$$

$$= |q| \cos(\Omega t - \varphi)$$