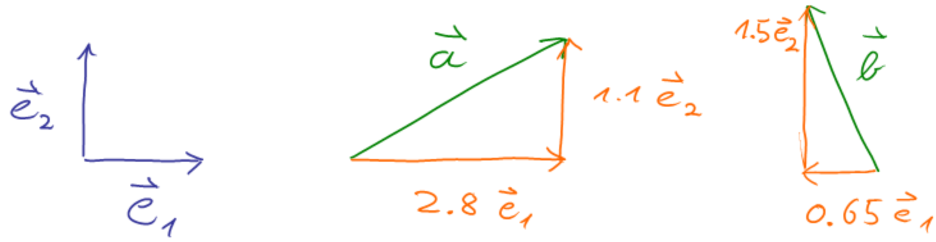
Basis, Dimension, Komponentendarstellung

Zuerst am Beispiel ebener Translationen:

- wähle Basis-Translationen $\vec{e}_1, \vec{e}_2$,

etwa



→ beliebige Translation $\vec{a}$ kann durch $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ gebildet werden:

$$\vec{a} = 2.8\,\vec{e}_1 + 1.1\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.1 \end{pmatrix}_B$$

$$\vec{b} = 0.65\,\vec{e}_1 + 1.5\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 1.5 \end{pmatrix}_B$$

wir schreiben / sagen:

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bildet Basis $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ der ebenen Translationen

$$\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 \quad \leftarrow \text{Komponentendarstellung von } \vec{a}$$

Komponenten von $\vec{a}$ bzgl. B

Komponentenschreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B := a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 .$$

Komponenten

Basis!

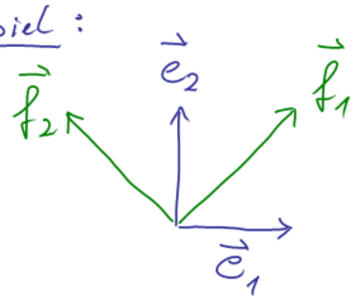
für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_B$ erhalten wir

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B , \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B$$

denn
$$\vec{a} + \vec{b} = \underbrace{a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2}_{\vec{a}} + \underbrace{b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2}_{\vec{b}}$$
$$= (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}_B ;$$
$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}_B .$$

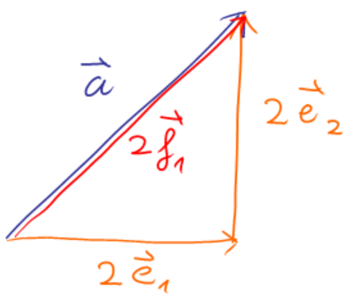
Vorsicht: Komponenten eines Vektors hängen immer vom gewählter Basis ab!

Beispiel:



$B = \{ \vec{e}_1 , \vec{e}_2 \}$

$B' = \{ \vec{f}_1 , \vec{f}_2 \}$



d.h. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}$

allgemeiner: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}_{B'}$, $a_i \neq a_i'$

Umrechnung der Komponenten a_1, a_2 nach a_1', a_2'

z.B. wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2\end{array}\right\} \longrightarrow \quad \begin{array}{l}\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)\end{array} \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_B = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \overset{(*)}{=} \frac{a_1}{2}(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) + \frac{a_2}{2}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2)$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\vec{f}_1 + \frac{1}{2}(-a_1 + a_2)\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \end{pmatrix}_{B'}$$

also $\quad a_1' = \dfrac{a_1 + a_2}{2}, \quad a_2' = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$.

Verallgemeinerung des bisherigen für allg. Vektorräume benötigt einige neue Begriffe:

Linearkombination

Die Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in V$ mit Skalaren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ist der Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \quad ;$$

im Summenschreibweise:

$$\vec{v} = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{a}_l \quad .$$

Lineare Unabhängigkeit

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ ist linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor $\vec{0}$ nur durch die triviale Linearkombination

$$0\,\vec{a}_1 + 0\,\vec{a}_2 + \dots + 0\,\vec{a}_k \qquad (\text{d.h. alle } \lambda_i = 0)$$

bilden lässt; andernfalls ist das System linear abhängig.

Vollständigkeit

Ein System von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in V$ ist vollständig (auch: ist ein Erzeugendensystem), wenn jeder Vektor $\vec{v} \in V$ durch Linearkombination der $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_k$ gebildet werden kann, d.h.

$$\vec{v} = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \vec{a}_\ell \quad \left(= \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k \right)$$

für geeignete $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

Basis

Eine Basis eines Vektorraums V ist ein linear unabhängiges und zugleich vollständiges System von Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k \in V$.

Die Komponenten eines Vektors $\vec{a} \in V$ bzgl. der Basis $B = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k \}$ sind die eindeutig bestimmten Skalare $a_1, a_2, \dots a_k$ der Linearkombination

$$\vec{a} = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \vec{b}_\ell \quad \left(= a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + \dots + a_k \vec{b}_k \right) ;$$

im Komponentenschreibweise:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}_B$$

Satz

Je zwei Basen eines Vektorraums V besitzen <u>dieselbe Anzahl</u> an Basisvektoren, genannt die <u>Dimension</u> des Vektorraums V.

[Beweis des Satzes z.B. in G. Fischer, Lineare Algebra]