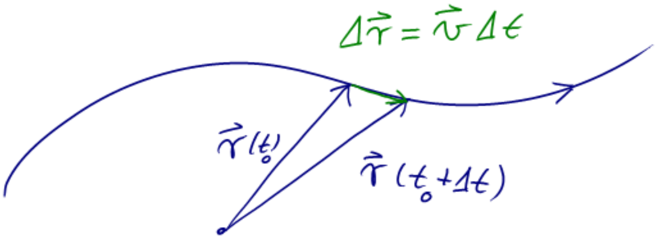
Mehrdimensionale Analysis

Ableitung vektorwertiger Fkten:

Motivation: Teilchenbahn $t \longmapsto \vec{r}(t) \in V$



momentane Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ erlaubt lineare Näherung der Bahn $\vec{r}(t)$ bei $t \approx t_0$:

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\Delta t \qquad (+\,\mathcal{O}(\Delta t^2))$$

d.h.
$$\vec{v}(t_0) = \underbrace{\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}}_{\Delta t \to 0} =: \dot{\vec{r}}(t)$$

Ableitung von $t \mapsto \vec{r}(t)$

allg:

Die Ableitung von $\vec{f}: D \to V,\ x \mapsto \vec{f}(x)$ in x ist

$$\vec{f}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)\right)$$

(falls existent.) Existiert $\vec{f}'(x)$ für alle $x \in D$ so ist

$$\vec{f}' : D \to V\,, \quad x \mapsto \vec{f}'(x)$$

die Ableitung von $\vec{f}$.

V ist beliebiger reeller oder komplexer Vektorraum.

→ lineare Näherung von $\vec{f}$ im x:

$$\vec{f}(x+h) = \vec{f}(x) + \vec{f}'(x)\,h \quad (+\,O(h^2))$$

Höhere Ableitungen:

$$\vec{f}^{(n+1)} := \left(\vec{f}^{(n)}\right)' \quad ; \quad \vec{f}^{(0)} := \vec{f}$$

Ableitungsregeln

1)
$$(\vec{f}+\vec{g})' = \vec{f}' + \vec{g}'$$
$$(\lambda \vec{f})' = \lambda \vec{f}'$$

(Linearität)

$\lambda \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

2)
$$(h\vec{f})' = h'\vec{f} + h\vec{f}'$$
$$\langle \vec{f},\vec{g}\rangle' = \langle \vec{f}',\vec{g}\rangle + \langle \vec{f},\vec{g}'\rangle$$
$$(\vec{f}\times\vec{g})' = (\vec{f}'\times\vec{g}) + (\vec{f}\times\vec{g}')$$

3)
$$(\vec{f}\circ u)' = (\vec{f}'\circ u)\,u'$$

4) $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ Basis von V; damit

$$\vec{f}(x) = \sum_{l=1}^{n} f_l(x)\,\vec{e}_l \equiv \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}_B$$

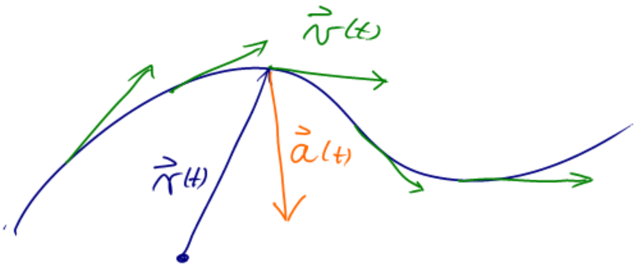
$$\xrightarrow{} \quad \vec{f}'(x) = \sum_{l=1}^{n} f_l'(x)\,\vec{e}_l \equiv \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}_B$$

Linearität

Anwendungen

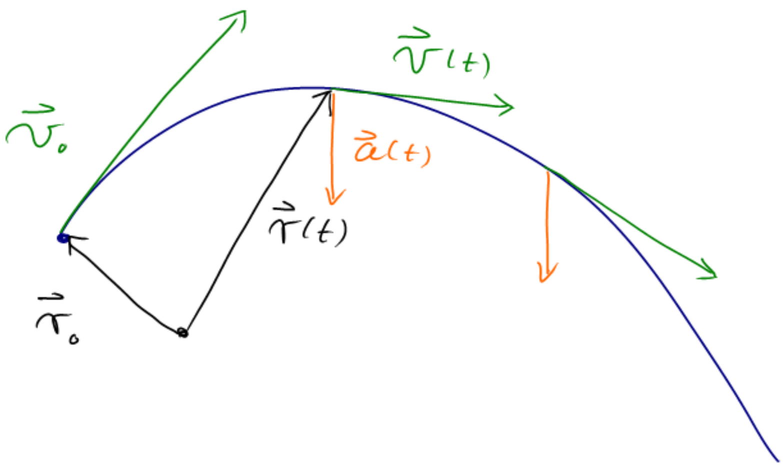
1) momentane Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Teilchens auf Bahn $\vec{r} : [t_1, t_2] \to V$:

$$t \mapsto \vec{r}(t)$$



- <u>momentane Geschw.</u> : $\vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$
- <u>momentane Beschleunigung</u>: $\vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

<u>Bsp.</u>: Wurf eines Körpers unter konst. Schwerebeschl. $\vec{g} = -g\,\vec{e}_3$

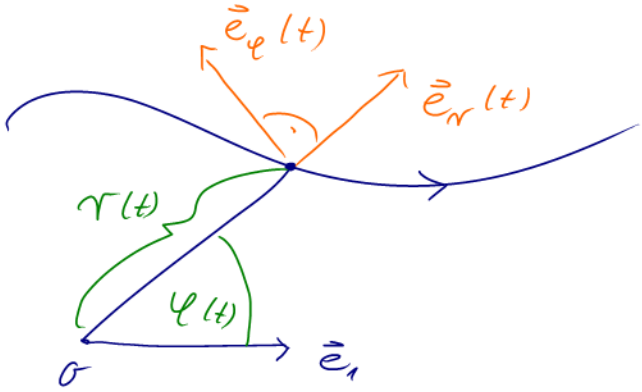


$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$$

$$\to \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t$$

$$\to \quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{g}$$

2) Teilchenbahn in der Ebene: momentane Geschw. und Beschleunigung in Polarkoordinaten



zeitabhängige Polarkoordinaten: $r(t), \varphi(t)$,

" " ONB: $\vec{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}_{B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}$

$$\vec{e}_\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}_B$$

$\longrightarrow \quad \vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t)$

benötigen $\dot{\vec{e}}_r$ und $\dot{\vec{e}}_\varphi$:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B = \dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}_B = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \; ; \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{e}_r) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\vec{e}}_r \;;$$

d. h. $$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}\,\vec{e}_\varphi}$$

Radial- Azimuthalgeschw.

<u>Beschleunigung:</u>

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r$$

d. h $$\boxed{\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)}\,\vec{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})}\,\vec{e}_\varphi}$$

Radial - Azimuthal beschleunigung