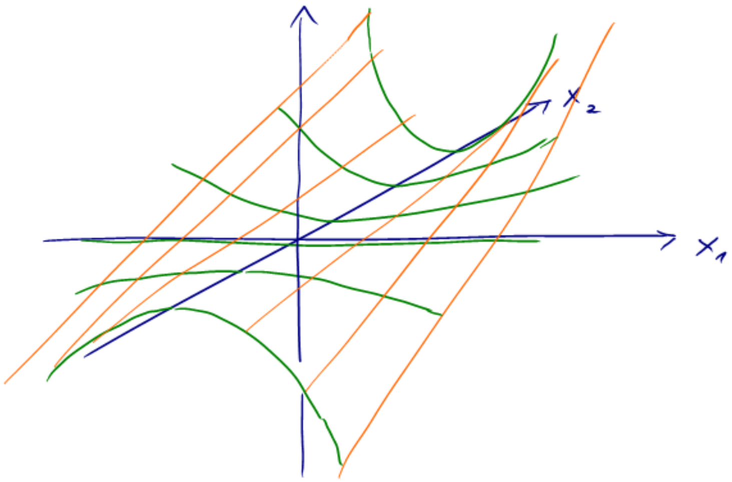
# Partielle Ableitung, Gradient und n-dimensionales Integral einer Funktion in n Variablen

$$f: \quad D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\mathbb{C}, V \text{ analog})$$

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \ldots$$

Definitionbereich $D \subset \mathbb{R}^n$

z.B. $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ (oder $f(x,y) = x^2 y$ )




## partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach $x_e$ in $\vec{x}$:

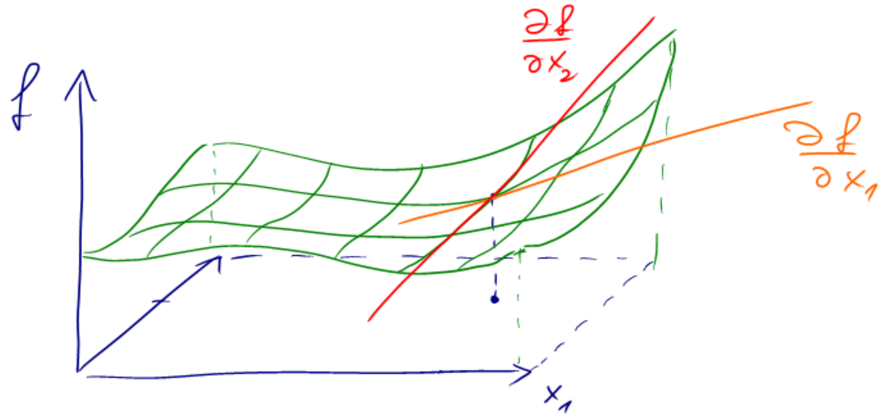
$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_e} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(x_1, \ldots, x_e + h, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_e, \ldots x_n)\Big)$$

$$\overset{!}{=} \frac{d}{dh} f(\vec{x} + h\vec{e}_e)\Big|_{h=0}$$

"Richtungsableitung nach $\vec{e}_e$"

$$\vec{e}_e = (0, \ldots, \underset{\text{lte Stelle}}{1}, \ldots 0)$$

geometrisch:




## Beispiele

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$

$\rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = 2x_1x_2 \,; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) = x_1^2$

2) Betragsfunktion: $\vec{x} \longmapsto |\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\rightarrow \quad \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_e} = \frac{1}{2\sqrt{\sum_i x_i^2}} \cdot 2x_e = \frac{x_e}{|\vec{x}|}$

3) $f(\vec{x}) = h(|\vec{x}|) \quad ; \quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_e}(\vec{x}) = h'(|\vec{x}|) \cdot \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_e} = h'(|\vec{x}|)\,\frac{x_e}{|\vec{x}|}$

## Lineare Näherung von $f(\vec{x})$ in $\vec{x}$:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$$

$$= f(\vec{x}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x})\,h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\,h_n$$

d.h. $\boxed{f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{e=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_e}(\vec{x})\,h_e} + \sigma(h^2)$

Definition: Gradient von $f(\vec{x})$ in $\vec{x}$:

$$\boxed{\operatorname{grad} f(\vec{x}) := \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\vec{x})\, \vec{e}_\ell} \quad \in \mathbb{R}^n$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \vec{h} \rangle} + \mathcal{O}(h^2)$$

Notation mittels Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}_B \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix}_B \equiv \operatorname{grad} f(\vec{x})$$

Beispiele

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 \quad \rightarrow \quad \operatorname{grad} f(\vec{x}) = (2x_1x_2, x_1^2)$

2) $\operatorname{grad} |\vec{x}| = (x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{1}{|\vec{x}|} = \hat{x}$

3) $\operatorname{grad} h(|\vec{x}|) = h'(|\vec{x}|)\, \hat{x}$

allg. Eigenschaften des Gradienten

1) $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von $f$ in $\vec{x}$

2) $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ steht senkrecht zu Niveau-Hyperflächen von $f$

3) $\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle$

zu 1): $\langle \operatorname{grad} f(\vec{x}), \hat{h} \rangle$ maximal wenn $\hat{h} \parallel \operatorname{grad} f(\vec{x})$ ✓

zu 3): $\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \frac{1}{\Delta t} \Big( f(\underbrace{\vec{x}(t+\Delta t)}_{= \vec{x}(t) + \dot{\vec{x}}(t)\Delta t}) - f(\vec{x}(t)) \Big)$

$$= \frac{1}{\Delta t} \Big( f(\vec{x}(t)) + \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t)\Delta t \rangle - f(\vec{x}(t)) \Big)$$

$$= \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle$$

zu 2) Niveau-Hyperfläche $N_c := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \overset{!}{=} c \}$

sei $\vec{x}(t)$ Bahn in $N_c$, d.h. $f(\vec{x}(t)) = c$

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) \underset{3)}{=} \langle \operatorname{grad} f(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle$$

tangential zu $N_c$ !

da $\vec{x}(t) \subset N_c$ beliebig folgt, dass $\operatorname{grad} f(\vec{x})$ senkrecht zu $N_c$

<u>Zweite</u> partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach $x_l$ und $x_j$ in $\vec{x}$:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_l \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}(x)\right)$$

für hinreichend glatte Fktn (S.v. Schwarz, vgl Ana II)

Beispiel:

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2$$

$$\to \quad \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1x_2) = 2x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\vec{x}) = 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2\right) = 2x_1$$

$$\left\lceil \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 x_2)\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1x_2) = 2x_1 \quad \checkmark \quad \right\rfloor$$

Höhere partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial^{n+1} f(\vec{x})}{\partial x_{\ell_1} \cdots \partial x_{\ell_n} \partial x_{\ell_{n+1}}} := \frac{\partial}{\partial x_{\ell_{n+1}}}\left(\frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{\ell_1} \cdots \partial x_{\ell_n}}\right)$$

Anwendung:

Taylor-Entwicklung von $f(\vec{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) &+ \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_\ell} h_\ell + \frac{1}{2!}\sum_{\ell_1,\ell_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_{\ell_1}\partial x_{\ell_2}} h_{\ell_1} h_{\ell_2} \\ &+ \frac{1}{3!}\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3=1}^{n} \frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_{\ell_1}\partial x_{\ell_2}\partial x_{\ell_3}} h_{\ell_1} h_{\ell_2} h_{\ell_3} + \cdots \end{aligned}}$$

Taylor-Entwicklung bis einschließlich k-ter Ordnung ergibt Polynom k-ten Grades in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dessen partielle Ableitungen $\frac{\partial^{(m)}}{\partial x_{l_1} \cdots \partial x_{l_m}}$ für $m = 0, \ldots, k$ mit denen von $f(\vec{x})$ übereinstimmen $(\vec{h} = 0)$.