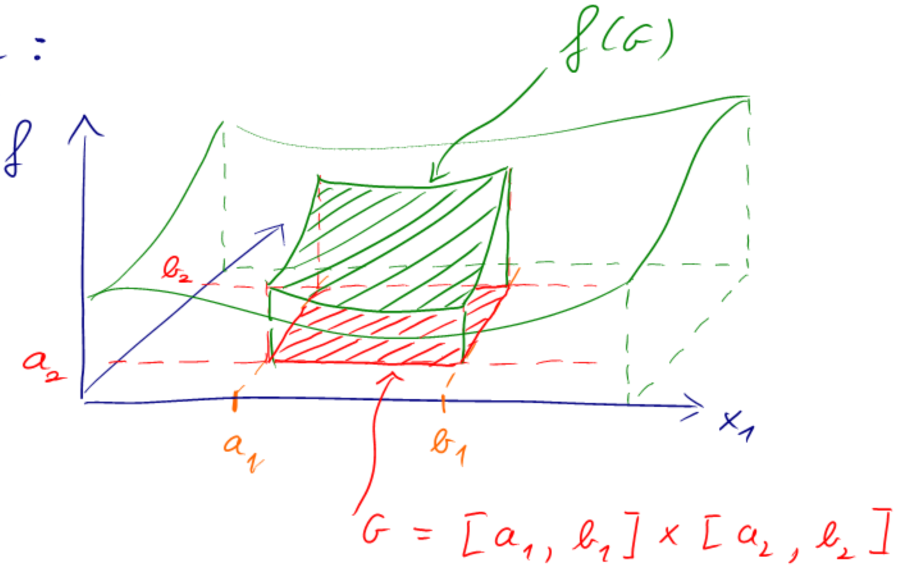
n-dimensionale Integral

einer Fkt $f: G \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x})$

mit $G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$

z.B. $\underline{\underline{n=2}}$:

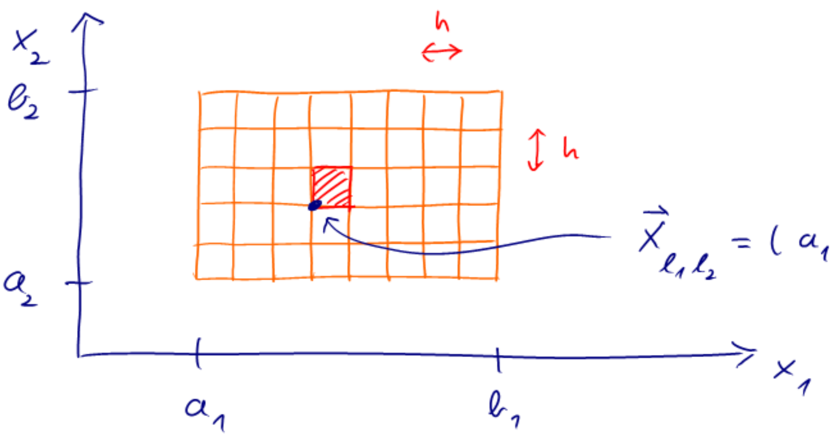


anschaulich:

$$\int_G f(\vec{x})\, d^n\vec{x} :=$$ Volumeninhalt des von G und $f(G)$ eingeschlossenen $(n+1)$-dim Volumens

Unterteilung des Integrationsbereichs G in n-dim. Würfel der Kantenlänge h,

$(n=2)$



$\vec{x}_{l_1 l_2} = (a_1 + h l_1,\ a_2 + h l_2)$

$l_1 = 0, \dots, m_1$

$l_2 = 0, \dots, m_2$,

führt auf

$$\int_G f(\vec{x})\, d^n\vec{x} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\sum_{l_1=0}^{m_1} \cdots \underbrace{\sum_{l_{n-1}=0}^{m_{n-1}} \underbrace{\sum_{l_n}^{m_n} f(\overbrace{\ldots, a_{n-1}+l_{n-1}h, a_n+l_n h}^{\vec{x}_{l_1 l_2 \cdots l_n}})\, h^n}_{=\int_{a_n}^{b_n} f(\ldots, a_{n-1}+l_{n-1}h, x_n)\, dx_n\, h^{n-1}}}_{=\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(\ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n\right) dx_{n-1}\, h^{n-2}}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{!}{=} \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n \right) \cdots \right) dx_2 \Bigg) dx_1$$

nach Weglassen der Klammern und Umordnen der dx_i ergibt sich

$$\boxed{\int_G f(\vec{x})\, d^n\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$\hookrightarrow G = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$

Für paarweise disjunkte $G_1, G_2, \dots, G_k$ wie oben und

$$G := \dot{\bigcup_{j=1,\dots,k}} G_j \qquad \text{sei} \qquad \int_G f(\vec{x})\, d^n\vec{x} := \sum_{j=1}^{k} \int_{G_j} f(\vec{x})\, d^n\vec{x} \; ;$$

<u>Offenbar gilt:</u>

(i)
$$\int_G \left(f(\vec{x}) + \lambda g(\vec{x})\right) d^n\vec{x} \overset{!}{=} \int_G f(\vec{x})\, d^n\vec{x} + \lambda \int_G g(\vec{x})\, d^n\vec{x}$$

(Linearität)

(ii)
$$\int_{G \times \tilde{G}} f(\underbrace{x_1, \dots, x_k}_{\vec{u}})\, g(\overbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}^{\vec{v}})\, d^n\vec{x}$$
$$\overset{!}{=} \int_G f(\vec{u})\, d^k\vec{u} \cdot \int_{\tilde{G}} g(\vec{v})\, d^{n-k}\vec{v}$$

$(G \subset \mathbb{R}^k, \; \tilde{G} \subset \mathbb{R}^{n-k})$

<u>Beispiele</u>

1) Masse des Rechtecks $G = [0,1] \times [0,2]$ mit <u>Flächenmassendichte</u> $\sigma(x_1, x_2) = \alpha + \beta x_1 x_2$:

$$M = \int_G \sigma(x_1, x_2)\, d^2\vec{x} = \alpha \underbrace{\int_G 1\, d^2\vec{x}}_{=2} + \beta \int_G x_1 x_2\, d^2\vec{x}$$

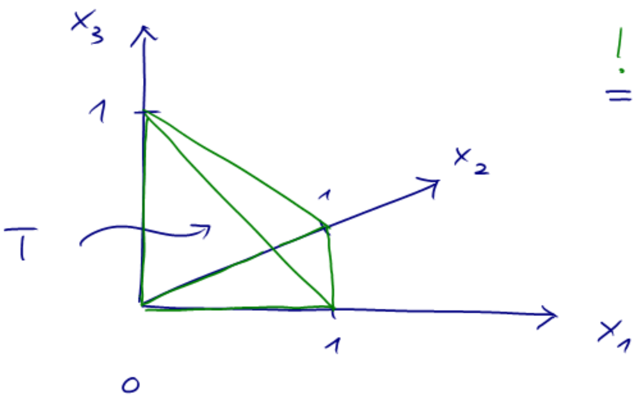
$$= 2\alpha + \beta \underbrace{\int_0^1 dx_1 \, x_1}_{= 1/2} \underbrace{\int_0^2 dx_2 \, x_2}_{= 2} = 2\alpha + \beta$$

2) Masse des Quaders $G = [0,a]^2 \times [0,h] \subset \mathbb{R}^3$
mit Massendichte $\rho(\vec{x}) = \rho_0 \, e^{-\lambda x_3}$

$$M = \int_G \rho(\vec{x}) \, d^3\vec{x} = \rho_0 \int_{[0,a]^2} 1 \, d^2\vec{x} \int_0^h e^{-\lambda x_3} \, dx_3$$

$$= \rho_0 \, a^2 \left(\frac{e^{-\lambda x_3}}{-\lambda} \Big|_0^h \right) = \rho_0 \, a^2 \left(1 - e^{-\lambda h}\right) / \lambda$$

3) Volumen des Tetraeders $T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_i \geq 0; \ \sum_{i=1}^3 x_i \leq 1 \}$

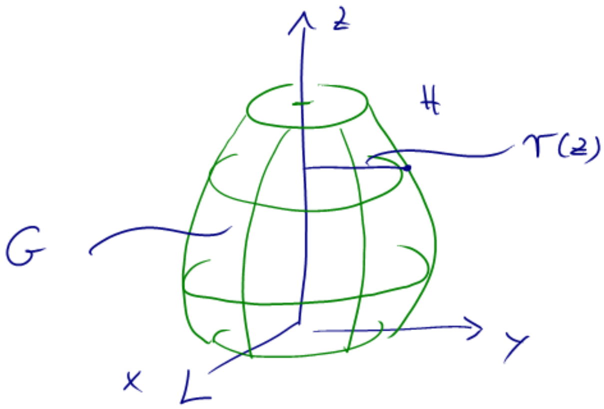


$$\stackrel{!}{=} \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_1 \leq 1; \ 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1; \ 0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 - x_2 \}$$

$$V(T) = \int_T 1 \, d^3\vec{x} = \int_0^1 dx_1 \underbrace{\int_0^{1-x_1} dx_2 \underbrace{\int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \, 1}_{(1-x_1-x_2)}}_{= -\frac{(1-x_1-x_2)^2}{2} \Big|_0^{1-x_1} = \frac{(1-x_1)^2}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x_1)^2 \, dx_1$$

$$= -\frac{1}{2} \left. \frac{(1-x_1)^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

4) Volumen eines Rotationkörpers



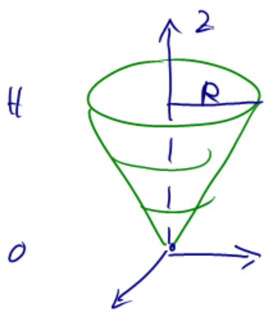
zerlege G in Kreisscheiben endlicher Dicke h:

$$G \underset{h \to 0}{=} \bigcup_{\ell=0}^{H/h} K_{r(z_\ell)} \times \underbrace{[z_\ell, z_\ell + h]}_{\stackrel{!!}{=} I_\ell} \quad ; \quad z_\ell = \ell \cdot z$$

$$\to V = \int_G d^3\vec{x} = \sum_{\ell=0}^{H/h} \int_{K_{r(z_\ell)} \times I_\ell} 1 \, d^3\vec{x} = \sum_{\ell=0}^{H/h} \pi r^2(z_\ell) \, h = \pi \int_0^H dz \, r^2(z)$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^H dz \, r^2(z)}$$

etwa Kreiskegel der Höhe H und Radius R:



$$r(z) = z \frac{R}{H} \quad \to \quad V = \pi \int_0^H \left(\frac{zR}{H}\right)^2 dz = \frac{\pi R^2 H}{3} \quad \checkmark$$

Transformationssatz

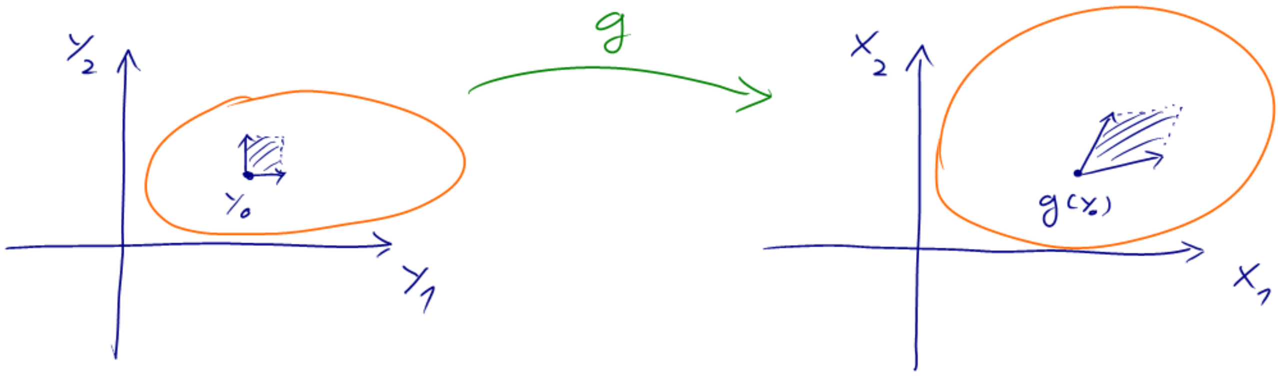
verallgemeinert Substitutionsregel eindim. Integrale:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx \overset{!}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f\circ g(y)\cdot g'(y)\,dy$$

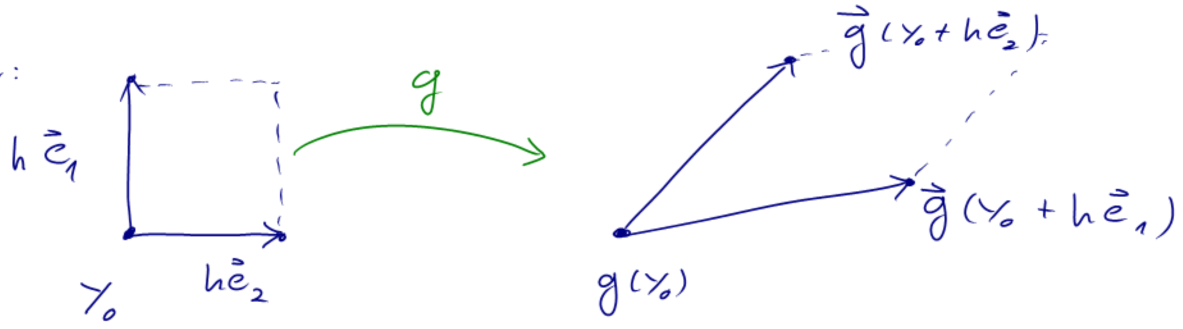
betrachte $\int_{\tilde G} f(\vec x)\,d^n \vec x$ wobei $\tilde G \subset \mathbb{R}^n$ Bild

von $G \subset \mathbb{R}^n$ unter Abbildung (= Koordinaten-Transformation)

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec y \longmapsto \vec g(\vec y) \equiv (g_1(\vec y), \dots, g_n(\vec y))$$



genauer:



für $h \to 0$ gilt:
$$\vec g(y_0 + h\vec e_1) = \vec g(y_0) + h\,\frac{\partial \vec g}{\partial y_1}(\vec y_0)$$
$$\vec g(y_0 + h\vec e_2) = \vec g(y_0) + h\,\frac{\partial \vec g}{\partial y_2}(\vec y_0)$$

$\rightarrow$ n-dim Würfel bei y_0 mit Kanten $h\vec{e}_1, \ldots, h\vec{e}_n$

wird unter g abgebildet auf

n-dim Spat bei $g(y_0)$ mit Kanten $h\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_1}(y_0), \ldots, h\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_n}(y_0)$

$\rightarrow$ Volumenänderung von h^n auf

$$\left|\det\left(h\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_1}, \ldots, h\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_n}\right)\right| = h^n \left|\det\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_n}\right)\right|$$

anhand Summendarstellung der Integrale folgt somit:

$$\boxed{\int_{\tilde{G}} f(\vec{x})\, d^n\vec{x} \overset{!}{=} \int_G f \circ g(\vec{y}) \left|\det\left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \vec{g}}{\partial y_n}\right)\right| d^n\vec{y}}$$

$\tilde{G} = g(G)$

mit Jacobi-Matrix von g in y,

$$J_g(\vec{y}) := \left(\frac{\partial g_i(\vec{y})}{\partial y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} ,$$

also:

$$\boxed{\boxed{\int_{\tilde{G}} f(\vec{x})\, d^n\vec{x} = \int_G f \circ g(\vec{y}) \left|\det J_g(\vec{y})\right| d^n\vec{y}}}$$

Transformationssatz ; $\tilde{G} = g(G)$; $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

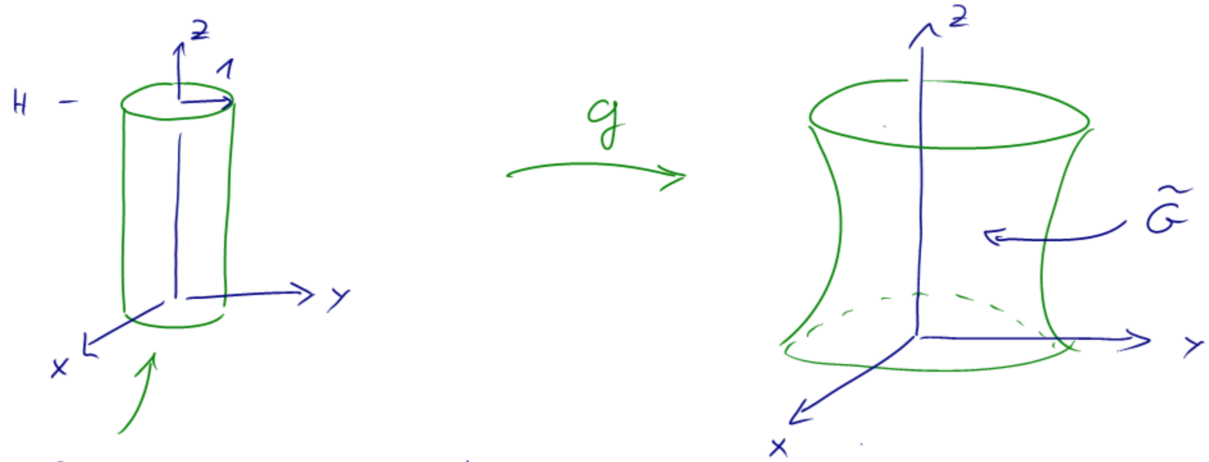
$\det J_g(\vec{y})$ ist die <u>Jacobi-Determinante</u> von g in $\vec{y}$

alternative Notation:

$$J_g(\vec{y}) = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

<u>Anwendungsbeispiele:</u>

1) Volumen eines Rotationskörpers (noch einmal):



G = Zylinder, $R=1$, H

mit $$\vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(z)\,x \\ r(z)\,y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(z) & 0 & r'(z)\,x \\ 0 & r(z) & r'(z)\,y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad |\det J_g(x,y,z)| = r(z)^2$$

$$\rightarrow \quad V(\tilde{G}) \equiv \int_{\tilde{G}} 1\, d^3\vec{x} = \int_G |\det J_g|\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \underbrace{\int_{K_1} dx\, dy}_{=\pi} \int_0^H dz \; r(z)^2 = \pi \int_0^H dz \; r(z)^2 \, .$$

$$G = K_1 \times [0, H]$$