2) Integration in Polarkoordinaten: $\int_{K(R)} f(\vec{x})\, d^2\vec{x}$

$\uparrow$

Kreisscheibe mit Radius R

Polarkoordinaten $\quad g: [0,R] \times [0,2\pi[\;\longrightarrow\; K(R) \subset \mathbb{R}^2$

$$(r, \varphi) \longmapsto \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad |\det J_g(r,\varphi)| = r$$

Somit $$\int_{K(R)} f(\vec{x})\, d^2\vec{x} = \int_{[0,R]\times[0,2\pi[} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr \quad .$$

2.B 2a) Flächeninhalt der Kreisscheibe $K(R)$:

$$A = \mathrm{Vol}_2(K(R)) = \int_{K(R)} 1\, d^2\vec{x} = \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$$

2b)

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2 + x_2^2)}\, d^2\vec{x} = \lim_{R\to\infty} \int_{K(R)} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\, d^2\vec{x}$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi\; r\, e^{-r^2} = 2\pi \int_0^\infty r\, e^{-r^2}\, dr$$

$$= 2\pi \left(- \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^\infty \right) = \pi \quad ! \qquad (*)$$

andererseits:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \; e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{I} \underset{(*)}{=} \sqrt{\pi}} \quad !$$

3) Integration in <u>Zylinderkoordinaten</u>: $\displaystyle\int_{Z(R,H)} f(\vec{x})\, d^3\vec{x}$

$Z(R,H) = K(R) \times [0,H]$: Zylinder mit Radius R und Höhe H

Zyl.-koordinaten: $g: [0,R] \times [0,2\pi[\times [0,H] \longrightarrow Z(R,H)$

$$(r,\varphi,z) \longmapsto \vec{g}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad J_g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad |\det J_g(r,\varphi,z)| = r$$

somit
$$\int_{Z(R,H)} f(\vec{x})\, d^3\vec{x} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \underbrace{\tilde{f}(r,\varphi,z)}_{= f(\vec{g}(r,\varphi,z))} \underline{\underline{r \, dz \, d\varphi \, dr}}$$

4) Integration in Kugelkoordinaten: $\int_{B_3(R)} f(\vec{x})\, d^3\vec{x}$

B_3 = Kugel mit Radius R, Mittelpkt. $\vec{0}$

Kugelkoordinaten: $g : [0,R] \times [0,2\pi[\times [0,\pi[\longrightarrow B_3(R)$

$$(r, \varphi, \vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \sin\vartheta \\ r \sin\varphi \sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{g}(r,\varphi,\vartheta)$$

$$\to J_g(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\to |\det J_g(r,\varphi,\vartheta)| = \left| -r^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - r^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - r^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - r^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta \right|$$

$$= \left| \overbrace{-r^2\cos^2\varphi\sin\vartheta} \overbrace{- r^2\sin^2\varphi\sin\vartheta} \right|$$

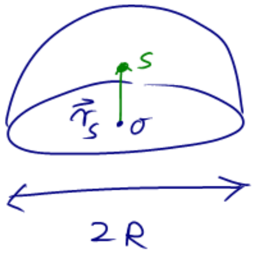
$$= r^2 \sin\vartheta$$

Somit
$$\int_{B_3(R)} f(\vec{x})\, d^3\vec{x} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(r,\varphi,\vartheta)\, \underline{\underline{\overbrace{r^2 \sin\vartheta}\, d\vartheta\, d\varphi\, dr}}$$

4a)
$$Vol_3(B_3(R)) = \int_{B_3(R)} 1\, d^3\vec{x} = \underbrace{\int_0^R r^2\, dr}_{= R^3/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta}_{= 2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

4b) Schwerpunkt einer Halbkugel $H(R)$ homogener Dichte ρ_0:

$\hookrightarrow \vartheta \in [0, \pi/2]$



$$\vec r_s := \frac{1}{M}\int_{H(R)} \rho_0 \, \vec x \, d^3\vec x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_s \end{pmatrix} \leftarrow \text{Symmetrie}$$

$$M = \int_{H(R)} \rho_0 \, d^3\vec x \underset{4a)}{=} \frac{2\pi}{3} R^3 \rho_0$$

$$\to z_s = \frac{1}{M}\int_{H(R)} \rho_0 \, z \, d^3\vec x = \frac{\rho_0}{M} \underbrace{\int_0^R r^3 \, dr}_{= R^4/4} \; \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi} \; \underbrace{\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos\vartheta}_{= z/r} \sin\vartheta \, d\vartheta}_{= \frac{\sin^2\vartheta}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}}$$

$$\to z_s = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \cdot \pi \, \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R$$