Skalarfeld, Vektorfeld, Potenzial, konservatives Vektorfeld

Skalarfeld: z.B. Temperatur T am Ort p

$\longrightarrow$ Abb. $T: E_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \longmapsto T(p)$

unter Verwendung kartesischer Koord. $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

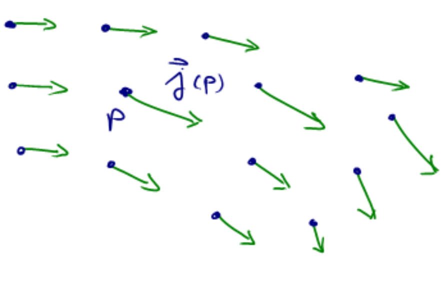
Abb. $$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{r} \longmapsto T(\vec{r})$$

allg.:

$$\boxed{\text{Skalarfeld } f = \text{Abb. } f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{r} \longmapsto f(\vec{r})}$$

weitere Beispiele:
- Dichte eines Mediums $\rho(\vec{r})$;
- Ladungsdichte $\rho_{el}(\vec{r})$
- el.-mag. Energiedichte $u(\vec{r})$

Vektorfeld: z.B. Stromdichte $\vec{j}$ einer stat. Gasströmung



$\longrightarrow$ Abb. $\vec{j}: E_3 \to V$, $p \longmapsto \vec{j}(p)$

unter Verwendung kart. Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}$ und

ONB B: Abb. $$\vec{j}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$$
$$\vec{r} \longmapsto \vec{j}(\vec{r}) = (j_1(\vec{r}), j_2(\vec{r}), j_3(\vec{r}))$$

allg.:

$$\boxed{\underline{\text{Vektorfeld}}\ \vec{A} = \text{Abb. } \vec{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \vec{r} \mapsto \vec{A}(\vec{r})}$$

weitere Beispiele:

- <u>Kraftfeld</u> $\vec{F}(\vec{r})$: Teilchen am Ort $\vec{r}$ erfährt Kraft $\vec{F}(\vec{r})$
- elektr. Feld $\vec{E}(\vec{r})$, Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$
- Gradient eines Skalarfelds $f(\vec{r})$:

$$\text{grad}\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \vec{r} \mapsto \text{grad}\, f(\vec{r})$$

→ Gradientenbildung ergibt <u>Vektorfeld</u> anhand eines <u>Skalarfeldes</u>:

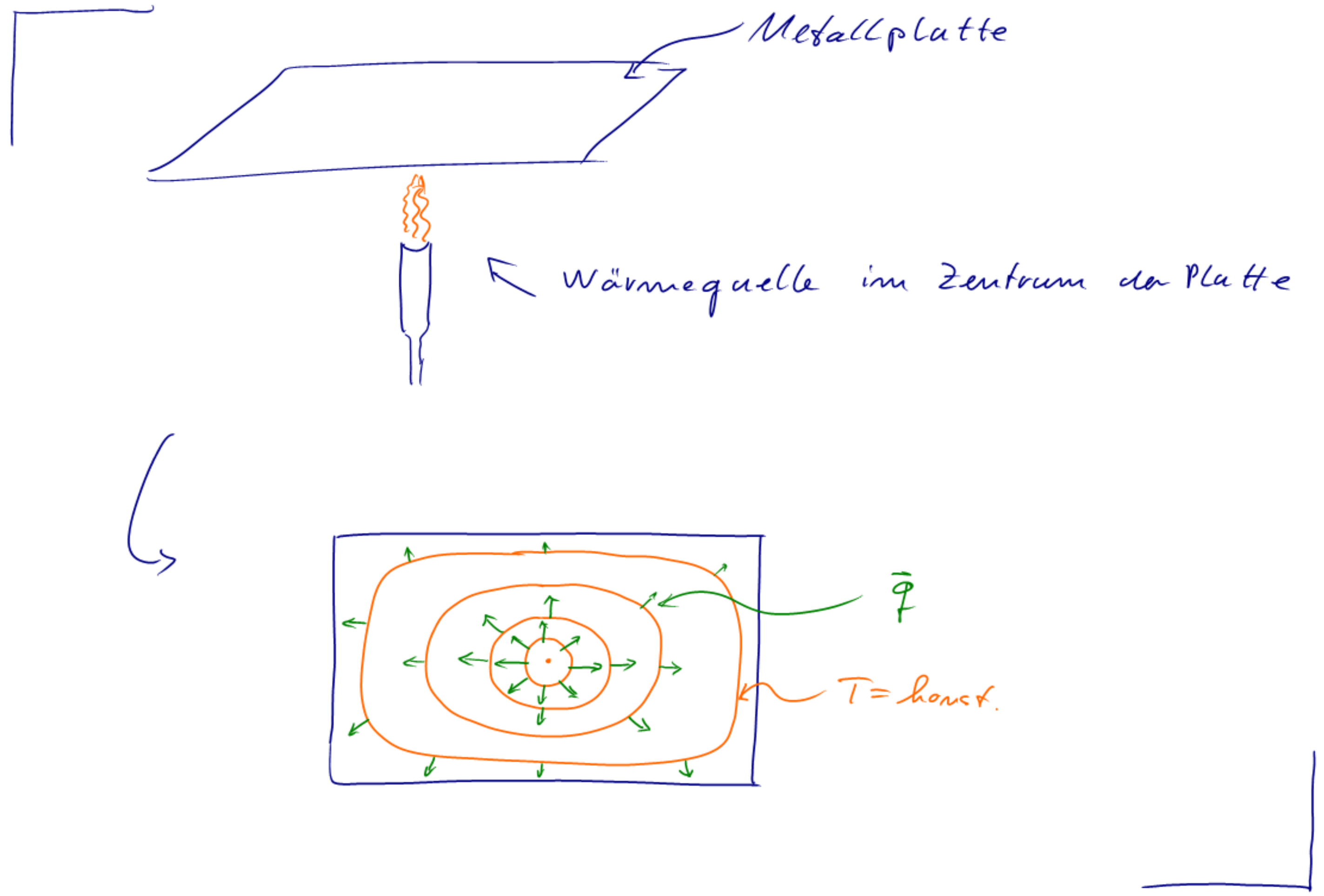
$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \vec{r} \mapsto f(\vec{x}) \quad \xrightarrow{\text{grad}} \quad \text{grad}\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r} \mapsto \text{grad}\, f(\vec{r})$$

<u>Skalarfeld</u>   <u>Vektorfeld</u>

<u>Beispiel</u>: <u>Wärmestromdichte</u> $\vec{q}(\vec{r})$ (Vektorfeld!) eines Mediums mit <u>Temperatur $T(\vec{r})$</u> (Skalarfeld!) und Wärmeleitfähigkeit λ (konstant):

$$\boxed{\vec{q} \overset{!}{=} -\lambda\, \text{grad}\, T} \quad (\text{Fourier})$$

Wärme strömt in Richtung des stärksten Temperaturabfalls!



Def.: Potenzial eines Vektorfelds

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Skalarfeld } \Phi \text{ ist Potenzial des Vektorfelds } \vec{A} \\ \text{g.d.w.} \quad \vec{A} \overset{!}{=} -\operatorname{grad} \Phi\end{array}}$$

Beispiele:

- $\lambda T(\vec{r})$ ist Potenzial der Wärmestromdichte $\vec{q}$,

  ⌈ denn $-\operatorname{grad} \lambda T(\vec{r}) = -\lambda \operatorname{grad} T(\vec{r}) \overset{!}{=} \vec{q}(\vec{r})$ ⌋

- $U(\vec{r}) := \frac{k}{2} |\vec{r}|^2$ ist Potenzial des Kraftfelds

  $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$

  ⌈ denn $-\operatorname{grad}\left(\frac{k}{2}|\vec{r}|^2\right) = -k\vec{r} = \vec{F}(\vec{r})$ ⌋

Def.: Konservatives Vektorfeld

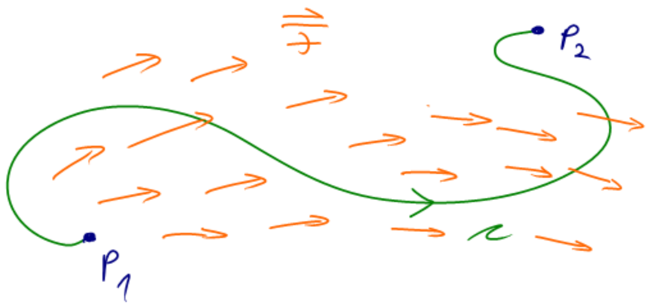
> Ein Vektorfeld ist **konservativ** g.d.w. es ein Potenzial besitzt.

demnach z.B. Wärmestromdichte $\vec{q}$ und Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -k\vec{r}$ konservativ.

Weg und Wegintegral (auch Linienintegral)

Beispiel: Teilchen unter **Kraft** $\vec{F}(\vec{r})$ werde von P_1 nach P_2 längs **Weg** c bewegt; bestimme die am Teilchen verrichtete **Arbeit**

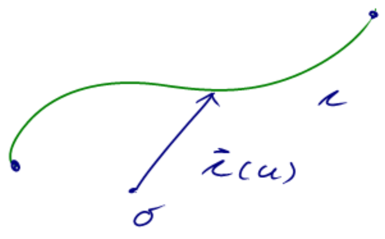
$$W = „-\int_c \vec{F}\, d\vec{\ell}\,“$$



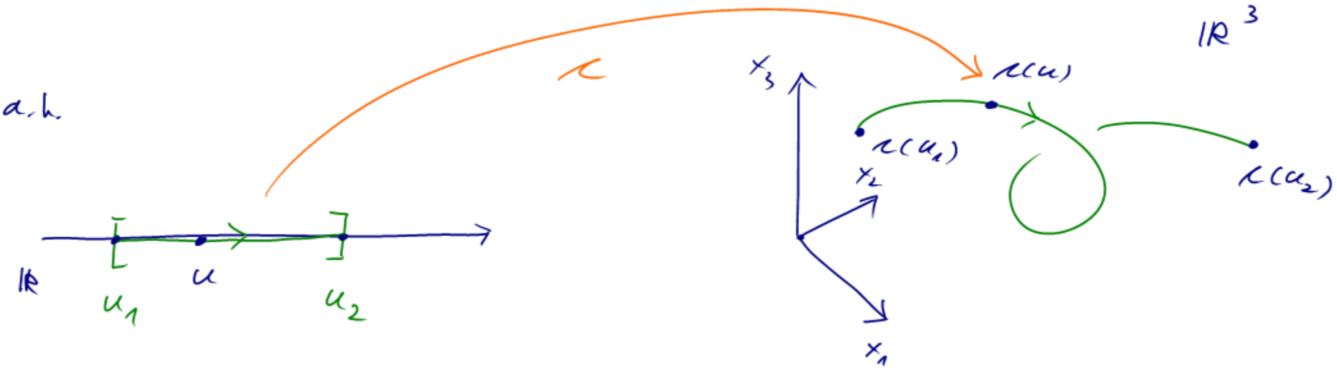
- **Parametrisierung des Wegs c:**

Abb. $c : [u_1, u_2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (kart. Koordinaten!)

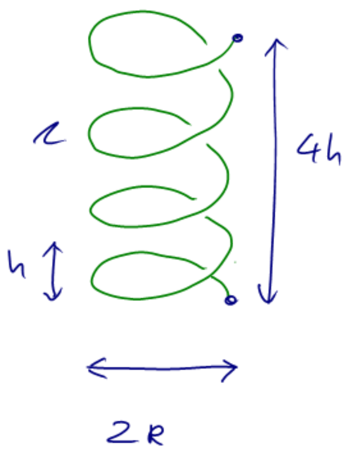
$u \longmapsto \vec{c}(u)$



d.h.



<u>Beispiel</u>: Schraubenweg mit n Windungen der Höhe h, Rad. R:

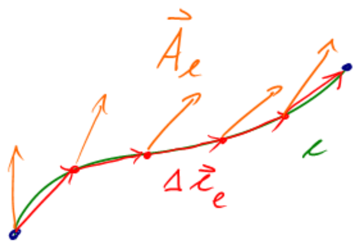


$$r : [0, 2\pi n] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi \longmapsto \vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ \frac{h}{2\pi}\varphi \end{pmatrix}$$

- <u>Wegintegral von $\vec{A}$ längs Weg r:</u>

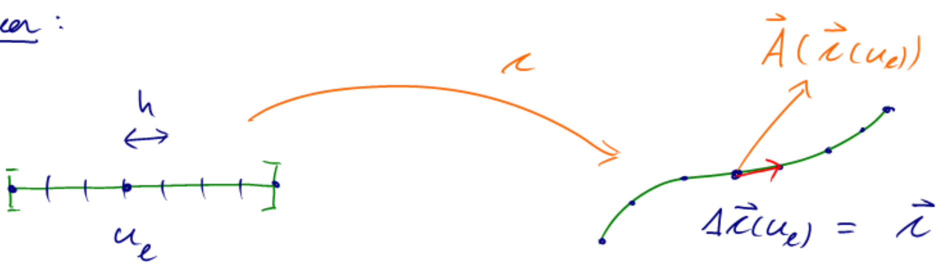
<u>grob</u>:



$$\int_r \vec{A}\,d\vec{r} \overset{!}{=} \sum_e \langle \vec{A}_e, \Delta\vec{r}_e \rangle$$

$$(\text{im Limes } |\Delta\vec{r}_e| \to 0)$$

<u>genauer</u>:



$$\Delta\vec{r}(u_e) = \vec{r}(u_e + h) - \vec{r}(u_e)$$

$$\approx \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u_e)\, h$$

$$\rightarrow \quad \int_c \vec{A}\, d\vec{\ell} = \sum_\ell \left\langle \vec{A}(u_\ell), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_\ell) \right\rangle h$$

im Limes $h \to 0$ also

$$\boxed{\int_c \vec{A}\, d\vec{\ell} \overset{!}{=} \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \vec{A}(\vec{r}(u)), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u) \right\rangle du}$$

<u>Beispiel</u>: Teilchen längs Schraubenweg im Schwerkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} \equiv -mg\,\vec{e}_z$:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\varphi) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \vec{F}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\rangle = -mg\frac{h}{2\pi}$$

$$\rightarrow -\int_c \vec{F}\, d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi n} d\varphi\, mgh/2\pi = mghn .$$

- <u>Wegintegral des Skalarfelds f längs c</u>:

$$\int_c f\,|d\vec{\ell}| := \int_{u_1}^{u_2} f(\vec{r}(u)) \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u)\right| du$$

- <u>Länge</u> des Wegs c:

$$L(c) := \int_c |d\vec{\ell}| = \int_{u_1}^{u_2} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u)\right| du$$

Beispiel: Länge des Schraubenwegs:

$$L(\kappa) = \int_0^{2\pi n} \left| \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial u} \right| du = \int_0^{2\pi n} \left(R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \right)^{1/2} du$$

$$= n \sqrt{(2\pi R)^2 + h^2} \quad \checkmark$$

Wegintegral eines $\boxed{\text{konservativen}}$ Vektorfelds längs Weg κ:

- Weg $\kappa : [u_1, u_2] \to \mathbb{R}$ von $\vec{r}_1 \equiv \vec{\kappa}(u_1)$ nach $\vec{r}_2 = \vec{\kappa}(u_2)$
- Vektorfeld $\vec{A}$ konservativ $\rightarrow$ es gibt ein Potenzial Φ

s.d. $\vec{A} = -\operatorname{grad} \Phi$ $(*)$

$$\rightarrow \int_\kappa \vec{A}\, d\vec{l} = \int_{u_1}^{u_2} \left\langle \vec{A}(\vec{\kappa}(u)), \frac{\partial \vec{\kappa}(u)}{\partial u} \right\rangle du$$

$$\underset{(*)}{=} - \int_{u_1}^{u_2} \underbrace{\left\langle \operatorname{grad} \Phi(\vec{\kappa}(u)), \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial u}(u) \right\rangle}_{\overset{!}{=} \frac{d}{du}\left(\Phi(\vec{\kappa}(u))\right)} du$$

$$\underset{(\text{HDI})}{=} \Phi(\vec{\kappa}(u_1)) - \Phi(\vec{\kappa}(u_2)) = \underbrace{\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)}$$

Potenzialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpkt des Wegs κ

wichtiges Resultat:

- $\vec{A}$ konservativ mit Potenzial Φ
- C Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\int_C \vec{A}\, d\vec{l} = \Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2)}$$

„Das Wegintegral über ein konservatives Vf ist wegunabhängig!"

Spezialfall: • $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$, d.h. der Weg ist geschlossen

• $\vec{A}$ konservativ

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\int_C \vec{A}\, d\vec{l} = 0}$$

Beispiel: Schwerkraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{g} = -mg\,\vec{e}_z$

besitzt Potenzial $\Phi(\vec{r}) = mgz$ und ist damit konservativ

$$\rightsquigarrow \quad -\int_C \vec{F}\, d\vec{l} = \Phi(\underbrace{\vec{r}_2}_{= h\vec{e}_z}) - \Phi(\underbrace{\vec{r}_1}_{= \vec{0}}) = mgh$$

, wie oben ✓