

Eigenschaften eines konservativen Vektorfelds  $\vec{A}$ :

1)  $\vec{A}$  besitzt ein Potenzial

2) für jeden geschlossenen Weg  $c$  ist  $\int_c \vec{A} d\vec{f} = 0$

$$3) \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

[ 1) klar nach Def.; 2) wurde oben gezeigt;  
zu 3): ist  $\Phi$  ein Potenzial zu  $\vec{A}$ , dann

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \stackrel{\text{S.v. Schwarz}}{=} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

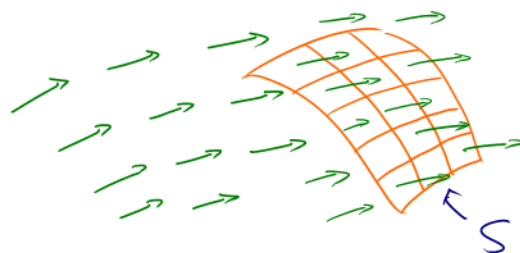
Flächenintegral, Divergenz (Quellstärke) eines Vektorfelds, Satz von Gauß

Beispiel: • Strömung mit Stromdichte  $\vec{j}$

• Flächenstück  $S$

→ bestimme Strom durch Fläche  $S$ :

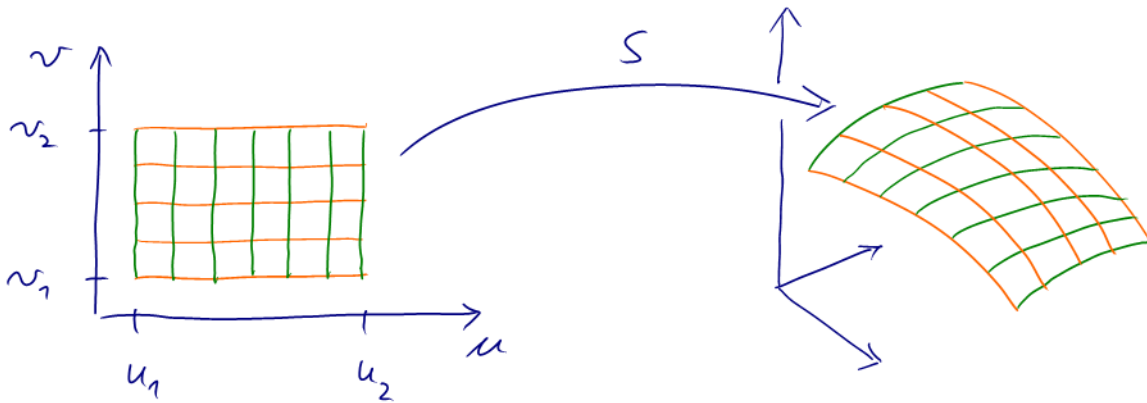
$$I(S) \equiv \int_S \vec{j} \cdot d\vec{f} = ?$$



• Parametrisierung eines Flächenstücks S:

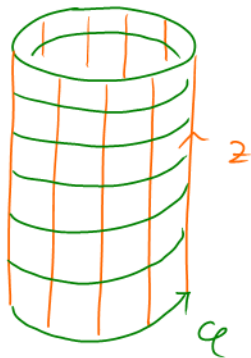
$$\text{Abb. } S : [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \vec{S}(u, v)$$



Beispiele:

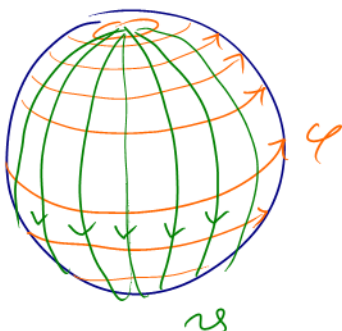
1) Zylinder der Höhe H, Radius R:



$$S : [0, 2\pi] \times [0, H] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, z) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

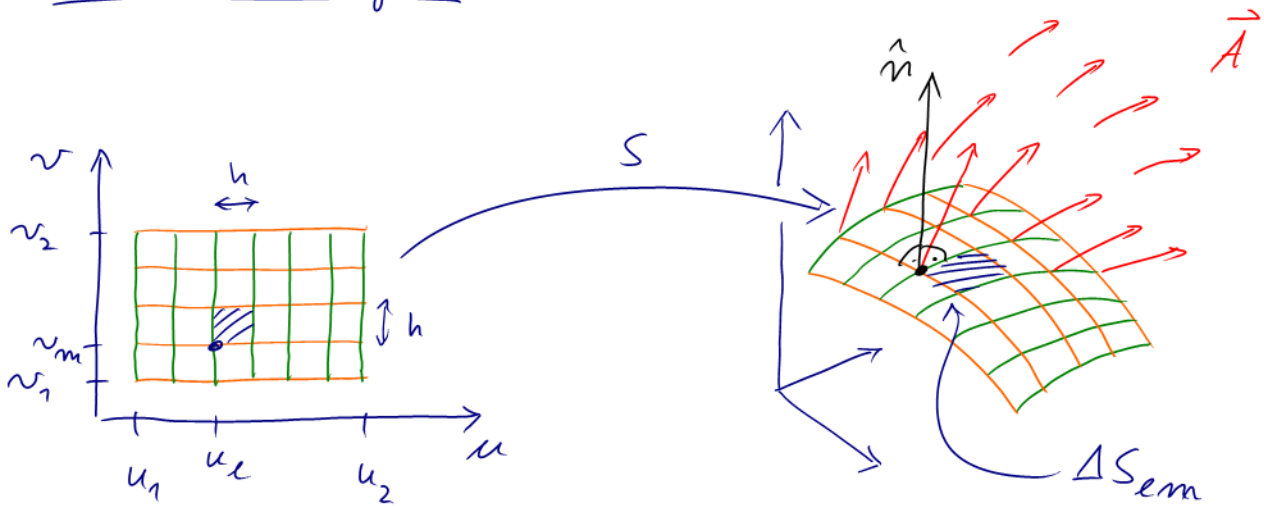
2) Sphäre



$$S : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

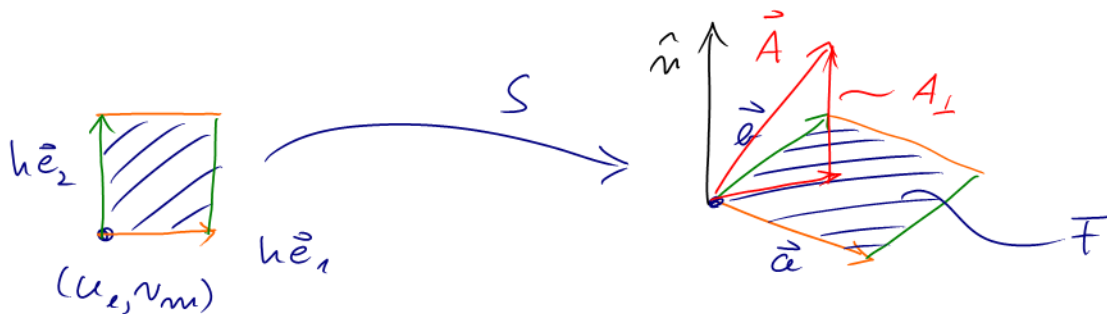
$$(\vartheta, \varphi) \mapsto R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

• Flächenintegral



$$\int_S \vec{A} d\vec{f} \stackrel{!}{=} \sum_{l,m} I_{l,m} \quad (\text{im Limes } h \rightarrow 0)$$

$I_{l,m}$  : Strom durch  $\Delta S_{em}$



$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial u}(u_l, v_m) h, \quad \vec{b} = \frac{\partial \vec{S}}{\partial v}(u_l, v_m) h$$

$$F = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{1}{F} \vec{a} \times \vec{b}$$

$$A_{\perp} = \langle \vec{A}, \hat{n} \rangle = \langle \vec{A}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \frac{1}{F}$$

$$\rightarrow I_{l,m} \stackrel{!}{=} A_{\perp} F = \langle \vec{A}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle \rightarrow$$

$$\int_S \vec{A} d\vec{f} = \sum_{\ell, m} \langle \vec{A}(\vec{s}(u_\ell, v_m)), \frac{\partial \vec{s}}{\partial u}(u_\ell, v_m) \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v}(u_\ell, v_m) \rangle h^2$$

d.h.:

$$\int_S \vec{A} d\vec{f} = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \langle \vec{A}(\vec{s}(u, v)), \frac{\partial \vec{s}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v}(u, v) \rangle du dv$$

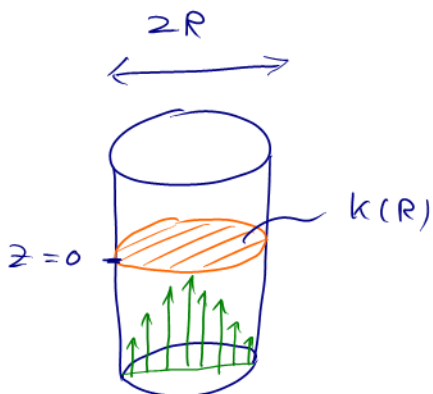
analog:

$$\int_S g |d\vec{f}| = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} g(\vec{s}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right| du dv$$

→ Flächeninhalt von S:  $A(S) = \int_S 1 |d\vec{f}|$

Beispiel: Strömung durch Zylinder mit Stromdichte

$$\vec{j}(s, \varphi, z) = \begin{cases} 2(s-R)^2 \vec{e}_z & : s \leq R \\ 0 & : s > R \end{cases}$$



$$\leadsto S : [0, R] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(s, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} s \cos \varphi \\ s \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{s}(s, \varphi)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{s}}{\partial s} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_s \quad ; \quad \frac{\partial \vec{s}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -s \sin \varphi \\ s \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = s \vec{e}_\varphi$$

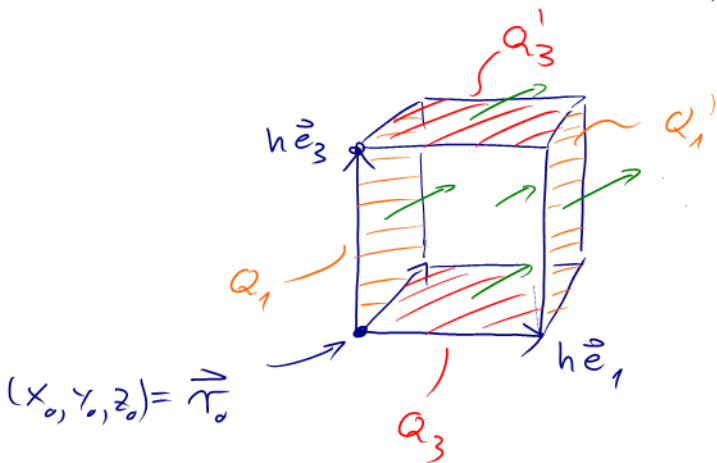
d.h.  $\frac{\partial \vec{s}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial \varphi} = s \vec{e}_s \times \vec{e}_\varphi = s \vec{e}_z$



wobei:  $V$ : Volumen bei  $\vec{r}$  mit  
 Volumeneinhalt  $|V| (\rightarrow 0)$   
 $S_V$ : Oberfläche des Volumens  $V$

$\rightarrow$  Berechnung der Divergenz im kart. Koordinaten:

wähle  $V =$  Würfel mit Kanten  $h\vec{e}_1, h\vec{e}_2, h\vec{e}_3$ :



$$S_V = Q_1 \cup Q_1' \cup Q_2 \cup Q_2' \cup Q_3 \cup Q_3'$$

$$\begin{aligned} \int_{S_V} \vec{A} \cdot d\vec{f} &= \int_{y_0}^{y_0+h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[ A_1(x_0+h, y, z) - A_1(x_0, y, z) \right] dy dz \\ &= h \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(x_0, y, z) \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{z_0}^{z_0+h} \left[ A_2(x, y_0+h, z) - A_2(x, y_0, z) \right] dx dz \\ &= h \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(x, y_0, z) \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+h} \left[ A_3(x, y, z_0+h) - A_3(x, y, z_0) \right] dx dy \\ &= h \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(x, y, z_0) \end{aligned}$$

im Grenzfall  $h \rightarrow 0$  also

$$\int_{S_V} \vec{A} \, d\vec{f} = h^3 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\vec{r}_0) \right)$$

d.h.

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}(\vec{r}_0) + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}(\vec{r}_0)$$

mittels

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

also

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$