Beispiele

a) $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ b) $\operatorname{div} y\,\vec{e}_x = 0$

c) Feld einer kugelsymm. Einheitsquelle, Radius a, in σ:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\vec{r}}{4\pi a^3} & : r \le a \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi r^2}\,\hat{r} & : r \ge a \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{A}_a(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi a^3} & : r < a \\[2ex] 0 & : r > a \end{cases}$$

⌈ Rechnung für $r > a$:

$$\operatorname{div} \frac{\hat{r}}{r^2} = \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r^3} = \sum_i \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x_i}{r^4} \cdot \frac{x_i}{r} \right)$$

$$= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5} \overbrace{\sum_i x_i^2}^{= r^2} = 0$$ ⌋

im Grenzfall $a \to 0$: Feld einer Einheits<u>punkt</u>quelle im σ:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \hat{r} \qquad \text{für } \vec{r} \neq \vec{0}$$

<u>Test</u>:

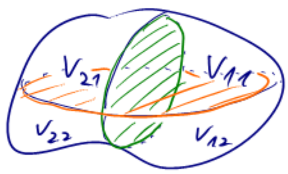
$$\int_{K(R)} \vec{A}_0 \, d\vec{f} = \int_{K(R)} \frac{1}{4\pi R^2} \underbrace{\hat{r}\, d\vec{f}}_{= |d\vec{f}|} = 1 \quad ✓$$

Satz von Gauß (– Lagrange – Green – Ostrogradski – Heaviside – Gibbs)

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, d^3\vec{x}}$$

∂V: Oberfläche ("Rand") des Volumengebiets V

$\ulcorner$



$$\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} \overset{!}{=} \int_{\partial V_1} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_2} \vec{A}\, d\vec{f}$$

$$\overset{!}{=} \int_{\partial V_{11}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{12}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{21}} \vec{A}\, d\vec{f} + \int_{\partial V_{22}} \vec{A}\, d\vec{f} = \cdots =$$

$$= \sum_i \underbrace{\left(\frac{1}{|V_i|} \int_{\partial V_i} \vec{A}\, d\vec{f} \right)}_{= \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i)} \cdot |V_i| \underset{|V_i| \to 0}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, d^3\vec{x} \, .$$

$\lrcorner$

Beispiele:

1) $$\int_{S_{\vec{r}_0}(R)} \vec{r}\, d\vec{f} = \int_{\partial K_{\vec{r}_0}(R)} \vec{r}\, d\vec{f} \overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_{K_{\vec{r}_0}(R)} \overbrace{\operatorname{div} \vec{r}}^{=3}\, d^3\vec{x} = 4\pi R^3$$

$\uparrow$

Sphäre von Radius R, Mittelpkt $\vec{r}_0$

2) „elekt. Ladungen sind die Quellen des elekt. Feldes“ :

d.h. genau: $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0}$

Integration über bel. Volumen V ergibt:

$$\underbrace{\int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{f}}_{\text{elekt. Fluss durch } \partial V} \overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{E}\, d^3\vec{x} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int_V \rho\, d^3\vec{x}}_{=:\, Q_V\text{, Ladung in } V}$$

$$\boxed{\int_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{f} = Q_V / \varepsilon_0}$$

z.B. Feld einer Pktladung q in $\vec{o}$: $V = K(R)$

$$q/\varepsilon_0 = \int_{S(R) = \partial K(R)} \vec{E}\, d\vec{f} \underset{\text{Ansatz: } \vec{E}_q(\vec{r}) = E(r)\,\hat{r}}{=} \int_{S(R)} E(R)\, \underbrace{\hat{r}\, d\vec{f}}_{= |d\vec{f}|} = 4\pi R^2\, E(R)$$

$$\longrightarrow \quad \vec{E}_q(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \hat{r} \qquad (\text{vgl. mit } \vec{A}_0 \,)$$

$\longrightarrow$ Coulomb-Kraft:

$$\vec{F}_{q \to \tilde{q}} = \tilde{q}\, E_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\tilde{q}}{r^2}\, \hat{r} \,.$$

3) <u>Kontinuitätsgleichung</u>

$\rho(\vec{r},t)$ und $\vec{j}(\vec{r},t)$ seien Massendichte und Massenstromdichte eines Mediums;

für beliebiges Volumengebiet V sei

$$M_V(t) := \int_V \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}$$: Masse in V zur <u>Zeit t</u>

$$I_V(t) := \int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)$$: Massenstrom durch Oberfläche ∂V von V zur <u>Zeit t</u>

<u>Massenerhaltung</u> erfordert

$$\frac{d}{dt} M_V(t) \overset{!}{=} - I_V(t)$$

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \frac{d}{dt} M_V(t) + I_V(t) = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} + \underbrace{\int_{\partial V} \vec{j}(\vec{r},t)\, d\vec{f}}_{\overset{\text{S.v.G.}}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}}$$

$$\rightarrow \quad 0 \overset{!}{=} \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t)\right) d^3\vec{r}$$

da V <u>beliebig</u> folgt: $$\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},t) = 0}$$

<u>Kontinuitätsgleichung</u>