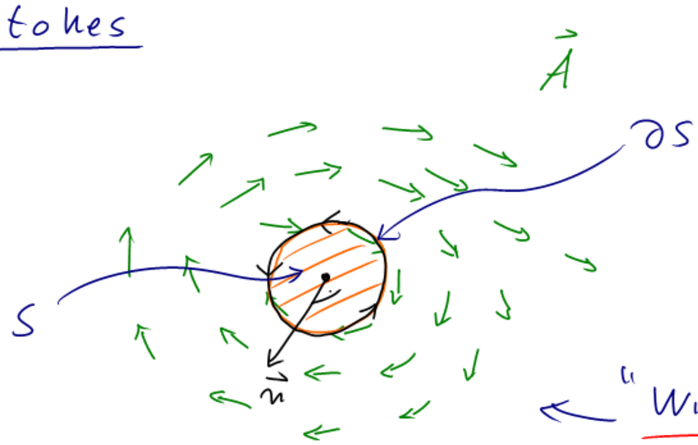
Rotation (Wirbelstärke) eines Vektorfelds, Satz von Stokes



$\rightsquigarrow \quad \underline{\int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{l} \neq 0}$

← „Wirbel" mit Achse ⊥ Zeichenebene

Rotation (Wirbelstärke) von $\vec{A}$ in $\vec{r}$:

Vektor $\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$; eindeutig bestimmt durch:

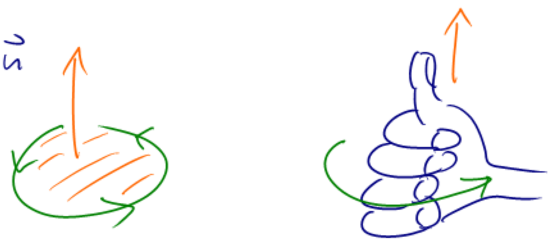
$$\boxed{\langle \vec{n}, \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \rangle := \lim_{|S| \to 0} \frac{1}{|S|} \int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{l}}$$

wobei:

- S Flächenstück mit Flächeninhalt $|S|$; Normalenvektor $\vec{n}$, Rand ∂S (*)
- $\vec{r} \in S$

(*) ∂S = geschlossener Weg mit Orientierung bzgl. $\vec{n}$ gemäß rechten-Hand-Regel:

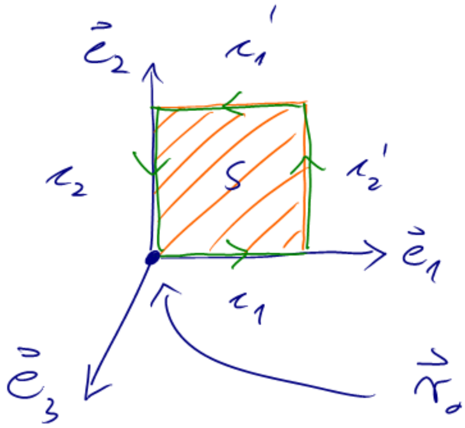
$\partial S \rightsquigarrow$



Berechnung von $\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$ in Kartesischen Koordinaten:

z-Komponente: $\quad (\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}))_3 = \langle \vec{e}_3, \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \rangle$

$\rightarrow$ wähle $S =$ Quadrat mit Kanten $h\vec{e}_1, h\vec{e}_2 \rightarrow \vec{n} = \vec{e}_3$



$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\partial S = c_1 + c_2' + c_1' + c_2$$

$$\frac{1}{|S|}\int_{\partial S} \vec{A}\,d\vec{l} = \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_0+h} \overbrace{\Big(A_1(x, y_0, z_0) - A_1(x, y_0+h, z_0)\Big)}^{\simeq -h \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(x, y_0, z_0)} dx$$

$$+ \frac{1}{h^2}\int_{y_0}^{y_0+h} \underbrace{\Big(A_2(x_0+h, y, z_0) - A_2(x_0, y, z_0)\Big)}_{\simeq h \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(x_0, y, z_0)} dy$$

$$= -\frac{1}{h}\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(x, y_0, z_0)\,dx}_{\hookrightarrow h \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\vec{r}_0)} + \frac{1}{h}\underbrace{\int_{y_0}^{y_0+h} \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(x_0, y, z_0)\,dy}_{\hookrightarrow h \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\vec{r}_0)}$$

$$= \frac{\partial A_2}{\partial x_1}(\vec{r}_0) - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}(\vec{r}_0)$$

d.h. $\quad \boxed{(\mathrm{rot}\,\vec{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}}$

auf gleiche Weise erhält man:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$

d.h.

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

oder mittels Levi-Civita-Symbol ε_{ijk}:

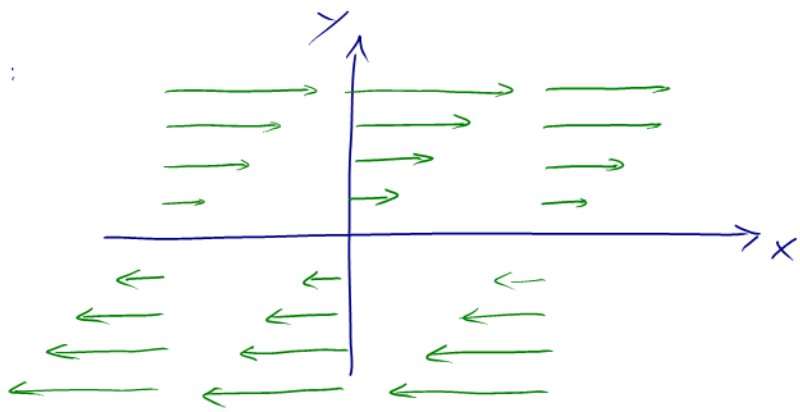
- $(\mathrm{rot}\,\vec{A})_k = \sum\limits_{i,j} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \qquad \left(= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right)$

- $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \sum\limits_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \; \vec{e}_k \qquad \left(= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \vec{e}_k \right)$

Einsteinsche Summenkonv.

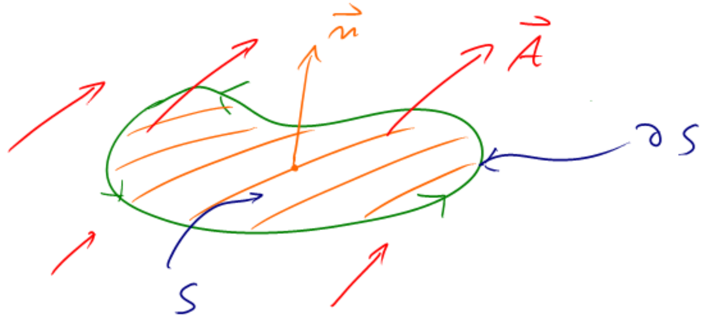
<u>Beispiel</u>: $\vec{A}(\vec{r}) = y\,\vec{e}_x$:

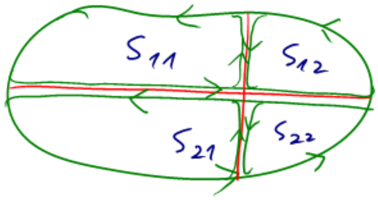
$\rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{e}_z$



Satz von Stokes

$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\, d\vec{f}}$$





$$\int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{l} \overset{!}{=} \int_{\partial S_1} \vec{A}\, d\vec{l} + \int_{\partial S_2} \vec{A}\, d\vec{l}$$

$$\overset{!}{=} \int_{\partial S_{11}} \vec{A}\, d\vec{l} + \int_{\partial S_{12}} \vec{A}\, d\vec{l} + \int_{\partial S_{21}} \vec{A}\, d\vec{l} + \int_{\partial S_{22}} \vec{A}\, d\vec{l} = \dots$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{1}{|S_i|} \int_{\partial S_i} \vec{A}\, d\vec{l}}_{\substack{\downarrow\, |S_i| \to 0 \\ \langle \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}_i), \vec{n}_i \rangle}} \; |S_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \langle \operatorname{rot} A(\vec{r}_i), |S_i|\, \vec{n}_i \rangle \overset{|S_i| \to 0}{=} \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\, d\vec{f}$$

Anwendung aus der Elektrodynamik:

„Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld.“

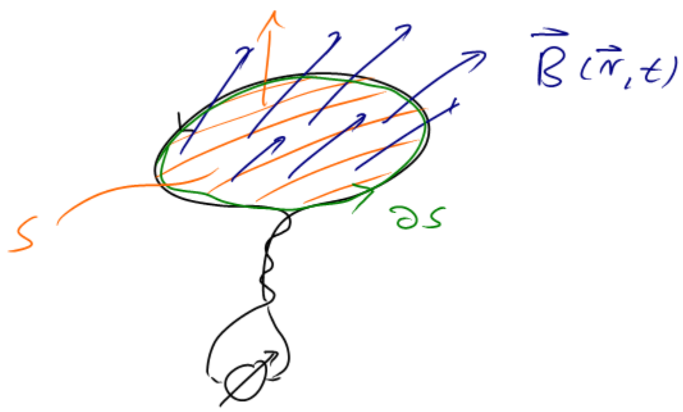
(Faradaysches Induktionsgesetz)

genauer:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) \overset{!}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r},t)}$$

(keine mathematische Identität, sondern ein physikalisches Gesetz!)

→ Induktionsspannung U_{ind} in Leiterschleife:



$$U_{ind} \equiv \int_{\partial S} \vec{E}\, d\vec{l} \overset{\text{S.v.S.}}{=} \int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{f} \overset{\text{Faraday!}}{=} -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{f}$$

$$= -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \vec{B}\, d\vec{f}}_{=\Phi_S^{mag}} \quad ; \text{ d.h. } \quad \boxed{U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi_S^{mag}}$$

$= \Phi_S^{mag}$: magnetische Fluss durch S

Zusammenfassung der Integralsätze:

Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{A}\, d^3x$$

∂V ↑ Fläche, V ↑ Volumen

Stokes:

$$\int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{f}$$

∂S ↑ Weg, S ↑ Fläche

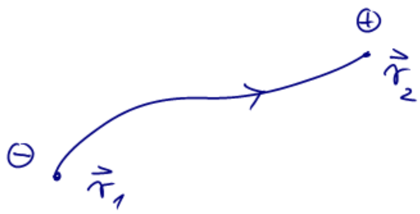
HDI:

$$\sum_{\partial \ell} \Phi \equiv \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = \int_{\ell} \operatorname{grad} \Phi\, d\vec{\ell}$$

ℓ ↑ Weg

$$\partial \ell = \{ (\vec{r}_2, +), (\vec{r}_1, -) \}$$

↑ Punkte



[obige Integralsätze sind Spezialfälle des allgemeinen Satz von Stokes ($\to$ Analysis III):

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

- M : k-dim. Mannigfaltigkeit
- ω : $(k-1)$-dim Differenzialform
- d : äußere Ableitung]