Erinnerung: Eigenschaften eines konservativen Vektorfelds $\vec{A}$:

(i) besitzt Potenzial

(ii) für jeden geschlossenen Weg $c$ $\quad \int_c \vec{A}\, d\vec{l} = 0$

(iii) $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$

$\hookrightarrow$ offenbar gleichbedeutend mit

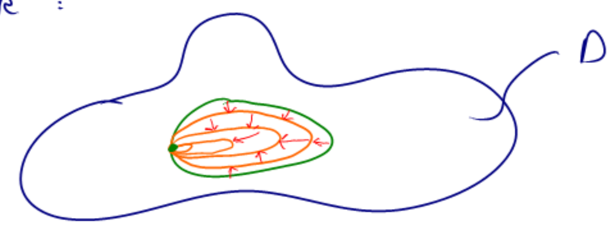
(iii)' $\quad \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$

Mathematik: ist $\vec{A}$ auf einem <u>einfach zusammenhängenden</u>* Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ definiert, so sind die Aussagen (i), (ii) und (iii)' (oder (iii)) <u>äquivalent</u>!

(*): D einfach zusammenhängend g.d.w. jeder geschlossene Weg $c \subset D$ sich in $D$ kontinuierlich auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

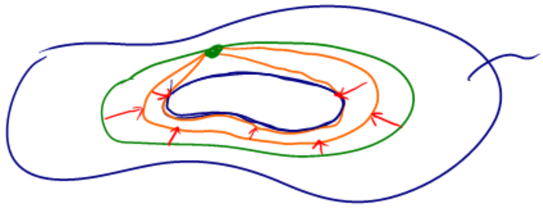
Beispiele im $\mathbb{R}^2$:

1)




einfach zusammenhängend

2)



D <u>nicht</u> einfach zusammenhängend

Mittels Satz von Stokes zeigt sich etwa "(iii)' $\Rightarrow$ (ii)":

$c$ geschlossener Weg in $D$


$c = \overset{!}{=} \partial S$

$\overset{!}{=}$ Rand von Fläche $S \subset D$

$\uparrow$ da $D$ einfach zusammenhängend

$$\rightarrow \quad \int_c \vec{A}\, d\vec{l} = \int_{\partial S} \vec{A}\, d\vec{l} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_S \operatorname{rot} \vec{A}\, d\vec{f} \underset{(iii)'}{=} 0$$

## <u>Differenzialoperatoren grad, div und rot in Zylinder- und Kugelkoordinaten</u>

Gradient in Zylinderkoordinaten

$$\rightarrow (\varrho, \varphi, z) \longmapsto \vec{r}(\varrho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos\varphi \\ \varrho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{r} \longmapsto f(\vec{r})$$

$\rightarrow$ Funktion $f$ in Zylinderkoord.:

$$\tilde{f}: [0, \infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\varrho, \varphi, z) \longmapsto \boxed{\tilde{f}(\varrho, \varphi, z) := f(\vec{r}(\varrho, \varphi, z))}$$

[ beachte: oft wird $\tilde{f}$ auch mit $f$ bezeichnet! ]

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

darstellbar als Funktion von $\varrho, \varphi, z$ und als Linearkombination von

$$\vec{e}_\varrho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho} \; ; \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \; , \quad \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\operatorname{grad} f(\vec{r}(\varrho, \varphi, z))}_{\overset{!!}{=}\ \operatorname{grad} \tilde{f}(\varrho, \varphi, z)} \overset{!}{=} a_\varrho(\varrho, \varphi, z)\, \vec{e}_\varrho + a_\varphi(\varrho, \varphi, z)\, \vec{e}_\varphi + a_z(\varrho, \varphi, z)\, \vec{e}_z \qquad (1)$$

<u>Aufgabe</u>: bestimme $a_\varrho, a_\varphi, a_z$ !

<u>Erinnerung</u>: $$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \overset{!}{=} \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle \qquad (2)$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{d\varrho} f(\vec{r}(\varrho, \varphi_0, z_0))(\varrho_0)}_{=\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varrho}(\varrho_0, \varphi_0, z_0)} = \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(\varrho_0, \varphi_0, z_0)), \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho}(\varrho_0, \varphi_0, z_0)}_{= \vec{e}_\varrho} \rangle \overset{!}{\underset{(1)}{=}} a_\varrho(\varrho_0, \varphi_0, z_0)$$

d.h. $$\boxed{a_\varrho = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varrho}}$$

ebenso: $$\frac{d}{d\varphi} f(\vec{r}(\varrho_0, \varphi, z_0))(\varphi_0) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{r}(\dots)), \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}(\dots)}_{= \varrho \vec{e}_\varphi} \rangle \overset{(1)}{=} \varrho\, a_\varphi(\varrho_0, \varphi_0, z_0)$$

d. h. $\boxed{a_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}}$

analog erhält man $\boxed{a_z = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}}$ und somit

$$\boxed{\widetilde{\operatorname{grad}} f = \vec{e}_\rho \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}}$$

$\rightarrow$ "Gradient in Zylinderkoordinaten":

$$\boxed{\widetilde{\operatorname{grad}} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}}$$

<u>Beispiel</u>: $\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = \rho^2 (\sin\varphi) \cdot z$

$$\rightarrow \quad \widetilde{\operatorname{grad} f} = 2\rho (\sin\varphi) z \, \vec{e}_\rho + \rho (\cos\varphi) z \, \vec{e}_\varphi + \rho^2 (\sin\varphi) \, \vec{e}_z \, .$$

## <u>Gradient in Kugelkoordinaten</u>

$$\vec{r}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}, \quad \vec{e}_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$$

auf dieselbe Weise wie oben erhält man:

$$\boxed{\widetilde{\operatorname{grad}} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

Beispiel:

$$\tilde{f}(r, \cancel{\vartheta}, \cancel{\varphi}) := h(r)$$

$$\longrightarrow \quad \widetilde{\operatorname{grad} f}(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r} \cdot 0 + \frac{\vec{e}_\varphi}{r \sin\vartheta}\, 0$$

$$= h'(r)\, \vec{e}_r \qquad \checkmark$$

Divergenz in Zylinderkoordinaten

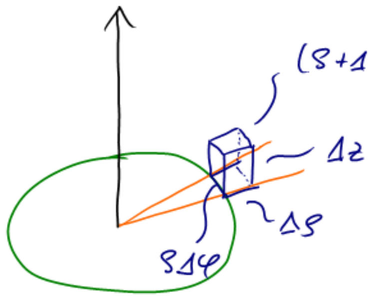
Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \sum_i A_i(\vec{r})\, \vec{e}_i$ in Zylinderkoord.

und L.K. von $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$:

$$\vec{A} = \tilde{A}_\varrho \vec{e}_\varrho + \tilde{A}_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$$

bestimme Divergenz mittels $\operatorname{div} \vec{A} = \lim\limits_{|V| \to 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f}$

wobei $V$ mit Kanten parallel $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$:




$$|V| = \varrho\, \Delta\varrho\, \Delta\varphi\, \Delta z$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\tilde{A}_\varrho \cdot \varrho\right) \Delta\varrho\, \Delta\varphi\, \Delta z$$

$$\rightarrow \int_{\partial V} \vec{A}\, d\vec{f} = \tilde{A}_\varrho(\varrho + \Delta\varrho, \varphi, z) \cdot (\varrho + \Delta\varrho) \Delta\varphi \Delta z - \tilde{A}(\varrho, \varphi, z)\, \varrho\, \Delta\varphi \Delta z$$

$$+ \tilde{A}_\varphi(\varrho, \varphi + \Delta\varphi, z) \Delta z \Delta\varrho - \tilde{A}_\varphi(\varrho, \varphi, z) \Delta z \Delta\varrho$$

$$+ \tilde{A}_z(\varrho, \varphi, z + \Delta z) \Delta\varrho\, \varrho \Delta\varphi - A_z(\varrho, \varphi, z) \Delta\varrho\, \varrho \Delta\varphi$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\tilde{A}_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{A}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\tilde{A}_z}$$

analog für Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tilde{A}_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\tilde{A}_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\tilde{A}_\varphi}$$

Beispiel:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = \operatorname{div}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{1}{r^2}\right) = 0 \quad \checkmark$$

$(r \neq 0)$

Ausdrücke für $\operatorname{rot}\vec{A}$ in Zylinder- und Kugelkoordinaten können auf gleiche Weise gewonnen werden, vgl. z.B. Arens et al., Mathematik, S. 927.