Laplace-Operator

$$\boxed{\Delta := \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}}$$

d.h. $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld

in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

d.h. $$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

in Zylinderkoordinaten (mittels entsprechenden Darstellungen von div und grad):

$$\boxed{\Delta \tilde{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z^2}}$$

$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) := f(\vec{r}(\rho, \varphi, z))$

in Kugelkoordinaten:

$$\boxed{\Delta \tilde{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}}$$

$\tilde{f}(r, \vartheta, \varphi) := f(\vec{r}(r, \vartheta, \varphi))$

Anwendungsbeispiele:

1) **Elektrostatik**, bestimmt durch

(i) $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (Gauß)

(ii) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ (nach Faradayschen Induktionsgesetz: $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$)

$\to$ elektrostatisches Potenzial Φ des elekt. Feld $\vec{E}$;

d.h. $\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\Phi$, in (i) ergibt

$$-\,\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\Phi) = \rho/\varepsilon_0$$

d.h. genau: $$\boxed{\Delta \Phi = -\rho/\varepsilon_0}$$ **Poisson-Gleichung**

(lineare, partielle DGL 2. Ordnung)

2) **Wärmeleitungsgleichung**:

Fourier: $$\boxed{\vec{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,T} \qquad (1)$$

$\vec{q}$: Wärmestromdichte

λ: Wärmeleitfähigkeit

T: ortsabhängige Temperatur $T(\vec{r})$

Wärme(energie)dichte

(2) $$\boxed{u(\vec{r})} := \frac{\text{Wärme(energie)}}{\text{Volumen}} = \boxed{\rho\, c\, T(\vec{r})} \quad (+\ \text{konst.})$$

c: spezifische Wärme

ρ: Massendichte

nach 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist Wärme als Form der Energie eine Erhaltungsgröße

→ Wärmedichte $u(\vec{r},t)$ und Wärmestromdichte $\vec{q}(\vec{r},t)$ erfüllen Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0$$

wegen (1) $\operatorname{div} \vec{q} = -\lambda \operatorname{div} \circ \operatorname{grad} T = -\lambda \Delta T$

und $u = \varrho c T$ somit

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(\vec{r},t) = a \Delta T(\vec{r},t)}$$

Wärmeleitungsgleichung

$a = \frac{\lambda}{\varrho c}$ „Temperaturleitfähigkeit"

(lin., partielle DGL 2. Ordnung in x, y, z, 1. Ordnung in t)

3) Quantenmechanik: z.B. Schrödinger-Gleichung eines freien Punktteilchens der Masse m:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r},t)}$$

$\hat{=}$ "Bewegungs-Gleichung" der komplexen Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t) \in \mathbb{C}$

($\hat{=}$ Wärmeleitungsgleichung in imaginärer Zeit $\tau = it$.)