Euklidischer Vektorraum

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt bildet einen <u>euklidischen Vektorraum</u>.

$\mathbb{R}^n$ als n-dim eukl. Vektorraum

<u>Standardskalarprodukt</u> des $\mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{l=1}^{n} x_l y_l$$

(erfüllt offenbar Eigenschaften (SP1 – SP2))

<u>Standardbasis:</u> $\vec{e}_1 \equiv \hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 \equiv \hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \hat{e}_n \equiv \hat{x}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(offenbar ONB)

Vektorprodukt für einen 3-dim eukl. VR V

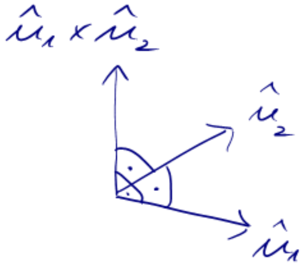
↳ Abbildung "... × ...": $V \times V \longrightarrow V$

(auch: <u>Kreuzprodukt</u> ↗) $\quad \vec{a}, \vec{b} \longmapsto \vec{a} \times \vec{b}$

mit <u>definierenden Eigenschaften</u>

(1)	$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$	(Antisymmetrie)
(2)	$\vec{a} \times (\vec{b} + \lambda \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \lambda\, \vec{a} \times \vec{c}$	(Linearität)
(3)	$\hat{u}_1, \hat{u}_2$ orthonormal $\Rightarrow \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_1 \times \hat{u}_2$ <u>rechtshändige ONB</u>	

(Orthonormalität)

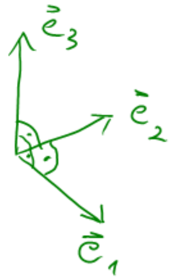


aus (1) und (2) folgt:

$$\boxed{\vec a \parallel \vec b \quad \Rightarrow \quad \vec a \times \vec b = \vec 0}$$

[denn:
- $\vec a \times \vec a \overset{(1)}{=} -\vec a \times \vec a \quad \to \quad \vec a \times \vec a = 0$;
- $\vec a \parallel \vec b$ bedeutet $\vec b = \lambda \vec a \quad \to \quad \vec a \times \vec b = \vec a \times (\lambda \vec a) \overset{(2)}{=} \lambda\, \vec a \times \vec a = \lambda \vec 0 = \vec 0$.]

→ Bestimmung von $\vec a \times \vec b$ in Komponenten bzgl. rechtshändiger ONB $B = \{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$:



$$\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B = \sum_{\ell=1}^{3} a_\ell \vec e_\ell \quad ; \quad \vec b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B = \sum_{m=1}^{3} b_m \vec e_m$$

$$\to \quad \vec a \times \vec b = \Big(\sum_\ell a_\ell \vec e_\ell\Big) \times \Big(\sum_m b_m \vec e_m\Big)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{\ell,m=1}^{3} a_\ell b_m \, \vec e_\ell \times \vec e_m$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\substack{\ell,m=1,\\ \ell<m}}^{3} \Big(a_\ell b_m \, \vec e_\ell \times \vec e_m + a_m b_\ell \, \overbrace{\vec e_m \times \vec e_\ell}^{-\vec e_\ell \times \vec e_m \ \overset{(1)}{\parallel}} \Big)$$

$$= \sum_{\substack{\ell,m=1,\\ \ell<m}}^{3} (a_\ell b_m - a_m b_\ell)\, \vec e_\ell \times \vec e_m$$

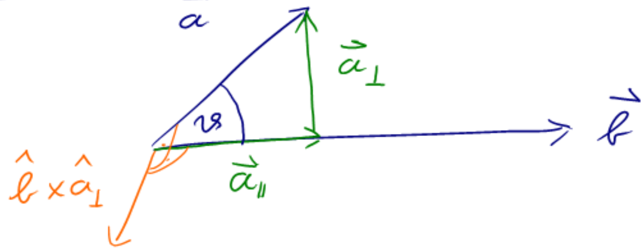
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_2}_{= \vec e_3} + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_3}_{= -\vec e_2} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underbrace{\vec e_2 \times \vec e_3}_{= \vec e_1}$$

d.h. :

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}_B}$$

Orthogonalkomponente mittels Vektorprodukt

bisher:



- $\vec a_\parallel = \langle \hat b, \vec a \rangle \hat b$,
- $\vec a_\perp = \vec a - \vec a_\parallel$,
- $\langle \vec a, \vec b \rangle = |\vec a| |\vec b| \cos\vartheta$

wir zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a) & \vec a_\perp = (\hat b \times \vec a) \times \hat b \\ b) & |\vec a \times \vec b| = |\vec a| |\vec b| |\sin\vartheta| \end{array}}$$

zu a):

$$(\hat b \times \vec a) = \hat b \times (\vec a_\parallel + \vec a_\perp) = \underbrace{\hat b \times \vec a_\parallel}_{=\vec 0,\ \text{da } \hat b \parallel \vec a_\parallel} + \hat b \times \vec a_\perp$$

$$= \hat b \times (|\vec a_\perp| \hat a_\perp) = |\vec a_\perp| \hat b \times \hat a_\perp$$

wegen $(\hat b \times \hat a_\perp) \times \hat b = \hat a_\perp$ also $(\hat b \times \vec a) \times \hat b = |\vec a_\perp| \hat a_\perp = \vec a_\perp$.

zu b):

$$|\vec a_\perp|^2 = |\vec a|^2 - |\vec a_\parallel|^2 = |\vec a|^2 (1 - \cos^2\vartheta) = |\vec a|^2 \sin^2\vartheta$$

$$|\vec a_\parallel|^2 = |\langle \hat b, \vec a \rangle|^2 = |\vec a|^2 \cos^2\vartheta$$

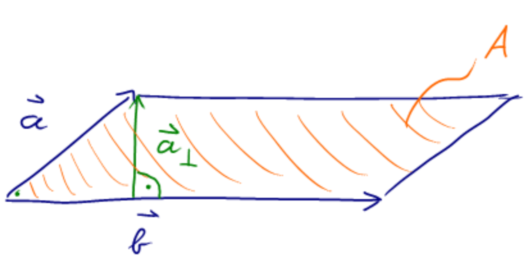
d.h. $|\vec a| |\sin\vartheta| = |\vec a_\perp| \overset{a)}{=} |\hat b \times \vec a| \qquad | \cdot |\vec b|$

$$|\vec b \times \vec a| = |\vec a| |\vec b| |\sin\vartheta| .$$

Anwendungen des Vektorprodukts:

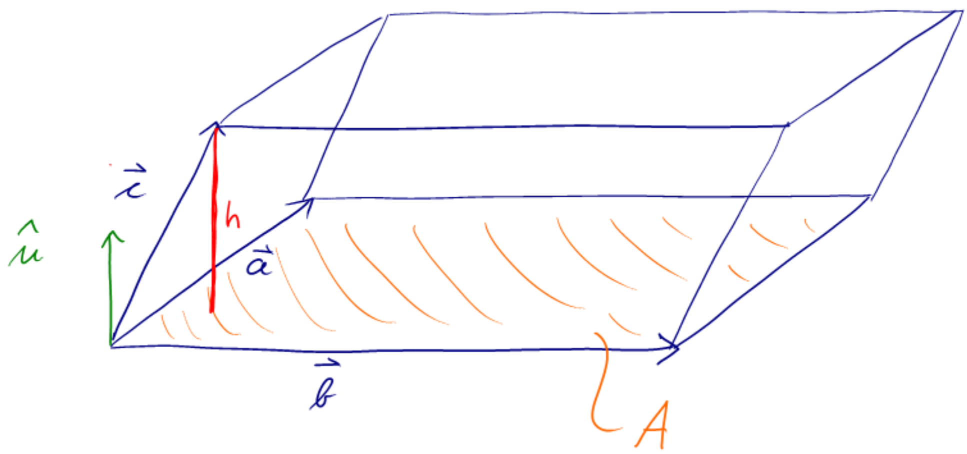
- Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kanten $\vec{a}, \vec{b}$:

$$A \overset{!}{=} |\vec{a} \times \vec{b}|$$



$$A = |\vec{a}_\perp| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a} \times \hat{b}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

- Volumeninhalt eines Spats (auch: Parallelepipeds) mit Kanten $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



$$\hat{u} = \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|}, \quad A = |\vec{b} \times \vec{a}|, \quad h = |\langle \hat{u}, \vec{c} \rangle|$$

$$\rightarrow \quad V = hA = \left|\left\langle \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b} \times \vec{a}|}, \vec{c} \right\rangle\right| |\vec{b} \times \vec{a}| = |\langle \vec{b} \times \vec{a}, \vec{c} \rangle|$$

d.h. $\boxed{V = |\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|}$

Spatprodukt von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$