Levi-Civita-Symbol, Einsteinsche Summenkonvention, Vektorprodukt-Identitäten

Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i=j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$

Levi-Civita-Symbol: ε_{ijk} für $i,j,k \in \{1,2,3\}$

(Levi-Civita: it. Mathematiker, 1873-1941)

definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} := \langle \underset{\nearrow \text{ONB}}{\vec{e}_i} \times \vec{e}_j , \vec{e}_k \rangle \overset{!}{=} \begin{cases} 1 & : (i,j,k) = (1,2,3) \text{ oder } (3,1,2) \text{ oder } (2,3,1) \\ -1 & : (i,j,k) = (1,3,2) \text{ oder } (2,1,3) \text{ oder } (3,2,1) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Somit $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj}$

und $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j$

$\Big[$ denn $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{e}_k \rangle = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \overbrace{\langle \vec{e}_i \times \vec{e}_j , \vec{e}_k \rangle}^{= \varepsilon_{ijk}}$ $\Big]$

Einsteinsche Summenkonvention: über doppelte Indices ist von 1 bis 3 zu summieren!

Beispiele:

- $a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$
- $\varepsilon_{ijk} a_i b_j \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$
- $a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \vec{a}$, $b_j \vec{e}_j = \vec{b}$

$\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_i b_j \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$

- $(\vec{a} \times \vec{b})_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j$

- $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \vec{e}_k$ usw.

Identität

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}} \qquad (1)$$

$\ulcorner$ d.h. $\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl}$ $\lrcorner$

(1) gilt wegen $\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{ilm} = \langle \vec{e}_j \times \vec{e}_k , \vec{e}_l \times \vec{e}_m \rangle$

$$\overset{!}{=} \delta_{jl}\, \delta_{km} - \delta_{jm}\, \delta_{kl} .$$

aus (1) folgt

Grassmann-Identität ("bac-cab" - Regel)

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\, \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c}\, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}$$

$\ulcorner$ denn $(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k = \varepsilon_{ijk}\, a_i\, \varepsilon_{lmj}\, b_l\, c_m$

$$= \underbrace{\varepsilon_{kij}\, \varepsilon_{lmj}}_{\overset{(1)}{=}}\, a_i\, b_l\, c_m$$

$$= (\delta_{kl}\, \delta_{im} - \delta_{km}\, \delta_{il})\, a_i\, b_l\, c_m$$

$$= b_k\, \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - c_k\, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle .$$ $\lrcorner$

aus der Grassmann-Id. folgen:

<u>Jacobi-Identität</u>

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$$

<u>Lagrange-Identität</u>

$$\langle \vec{a} \times \vec{b} , \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

⌈ Jacobi-Id. folgt durch 3-maliges Anwenden der Grassmann-Id;

Lagrange-Id:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b} , \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \langle \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}), \vec{a} \rangle \overset{G.I}{=} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle .$$

⌋

Mittels Grassmann-Id folgt z.B.:

$$(\hat{b} \times \vec{a}) \times \hat{b} = -\hat{b} \times (\hat{b} \times \vec{a}) = \underbrace{-\hat{b} \langle \hat{b}, \vec{a} \rangle}_{= \vec{a}_{\parallel}} + \vec{a} \underbrace{\langle \hat{b}, \hat{b} \rangle}_{=1}$$

$$= \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \vec{a}_{\perp} . \quad ✓$$