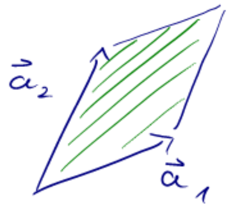
Volumen eines n-Spats, Determinante einer $n \times n$ Matrix, Permutationen

$n=1$: 1-Spat $\hat{=}$ $a \in \mathbb{R}$

mit Länge ≡ 1-Volumen $V_1(a) = \underline{\underline{|a|}}$

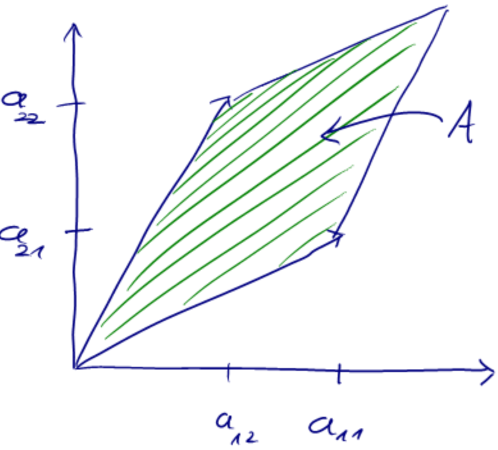
$n=2$: 2-Spat $\hat{=}$ Parallelogramm



mit Flächeninhalt ≡ 2-Volumen

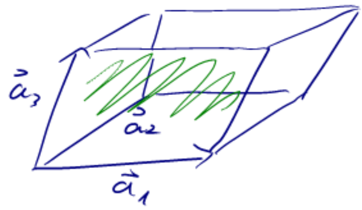
$$V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \underline{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

falls $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}_B$ also



$$A \equiv V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \underline{\underline{|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|}} \quad !$$

$n=3$: 3-Spat = "Spat"



mit Volumeninhalt ≡

3-Volumen $V_3(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \underline{|\langle \vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle|}$

falls $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ also

$$V_3(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = |\varepsilon_{ijk}\, a_{i1}\, a_{j2}\, a_{k3}| \quad !$$

$$= \underline{|a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23}|}$$

allgemeines n: n-Spat aufgespannt durch n Vektoren

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$; V euklidischer VR der Dim. n

bzgl. ONB $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ gelte $\vec{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$

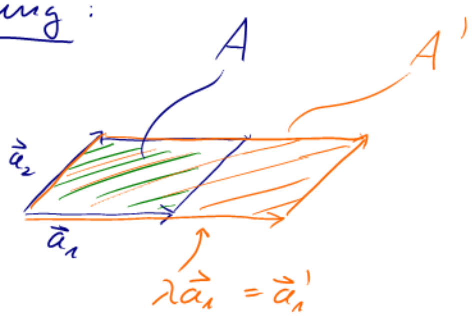
$$\boxed{V_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = ?}$$

Strategie: bestimme V_n durch allgemeine Eigenschaften

und folgere daraus explizite Formel für $V_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$!

Charakteristische Eigenschaften sind z.B.:

1) Skalierung:



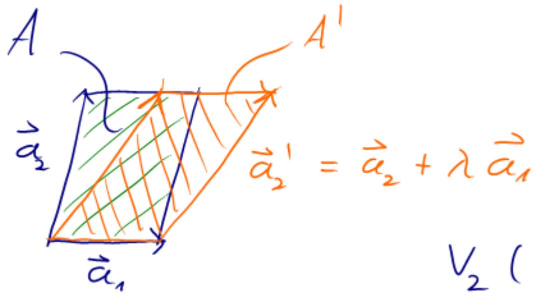
$A' \overset{!}{=} \lambda A$, d.h.

$$V_2(\lambda \vec{a}_1, \vec{a}_2) \overset{!}{=} \lambda V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

für allg n erwarten wir:

$$V_n(\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{a}_i, \dots \vec{a}_n) \overset{!}{=} \lambda V_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n)$$

2) Invarianz unter Scherung:



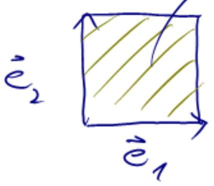
$A' \overset{!}{=} A$, d.h.

$$V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2 + \lambda \vec{a}_1) \overset{!}{=} V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$$

allg.: $$V_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) \overset{!}{=} V_n(\ldots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j, \ldots)$$

3) <u>Normierung</u>:

$A = 1$, d.h. $V_2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$



<u>allg</u>: $$V_n(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) \overset{!}{=} 1$$

tatsächlich ist V_n durch diese drei Eigenschaften eindeutig bestimmt !

→ <u>Definition / Satz</u>

Das <u>n-dimensionale orientierte Volumen</u>

$$\Omega_n : V^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (\dim V = n)$$
$$(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \longmapsto \Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$$

ist eindeutig bestimmt durch Eigenschaften

(V1) $$\Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \lambda\vec{a}_i, \ldots \vec{a}_n) = \lambda\, \Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ (Skalierung)

(V2) $$\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \vec{a}_i, \ldots) = \Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots)$$

(Scherinvarianz)

(V3) $$\Omega_n(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1 \qquad \text{(Normierung)}$$

Das <u>n-dim. Volumen</u> ist $V_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) := \left| \Omega_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \right|$.

aus (V1) – (V3) folgern wir zunächst weitere Eigenschaften:

(V4) $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{o}, \dots, \vec{a}_n) = 0$,

(V5) $\Omega_n(\lambda\vec{a}_1, \dots, \lambda\vec{a}_n) = \lambda^n\, \Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

(V6) $\Omega_n(\dots, \underline{\underline{\vec{a}_i}}, \dots) = \Omega_n(\dots, \underline{\underline{\vec{a}_i + \vec{u}}}, \dots)$

wobei $\vec{u} = \sum\limits_{\substack{l=1 \\ \underline{\underline{l \neq i}}}}^{n} u_l \vec{a}_l$

(V7) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = 0$;

insbesondere $\Omega_n(\dots, \underbrace{\vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i}_{=}, \dots) = 0$

(V8) <u>Linearität</u>: neben (V1) auch

$$\Omega_n(\dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots) = \Omega_n(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \Omega_n(\dots, \vec{b}_i, \dots)$$

(d.h. Ω_n ist <u>Multilinearform</u>)

(V9) <u>Vorzeichenwechsel bei Vertauschung</u>:

$$\Omega_n(\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots) = - \Omega_n(\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots)$$

(d.h. Ω_n ist <u>alternierend</u>)

⌈ • (V4) folgt aus (V1) wegen $\vec{o} = 0\,\vec{o}$,

• (V5) folgt aus n-maligem Anwenden von (V1) ;

• (V6) folgt aus $(n-1)$-maligen Anwenden von (V2)

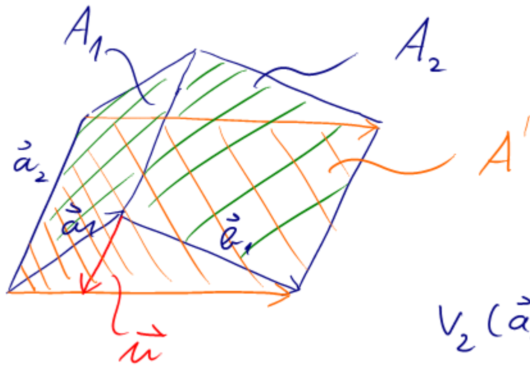
• (V7): sind $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear <u>abhängig</u>, so

$$\vec{a}_{i_0} + \underbrace{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i_0}}^{n} \lambda_l \vec{a}_l}_{} = 0 \quad \text{für ein } i_0 \text{ und geeignete } \lambda_l \text{;}$$

mit $\vec{u} =$ ↲ also nach (V6) und (V4)

$$\Omega(\dots, \vec{a}_{i_0}, \dots) = \Omega(\dots, \vec{a}_{i_0} + \vec{u}, \dots) = 0 .$$

• (V8): <u>geometrisch</u> klar:



aufgrund Scherinvarianz

$$A_1 + A_2 \overset{!}{=} A'$$

$$V_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + V_2(\vec{b}_1, a_2) \overset{!}{=} V_2(\vec{a}_1 + \vec{b}_1, \vec{a}_2)$$

<u>formal</u> für bel. $n \geq 2$:

z.z.: $$\Omega_n(\dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots) \overset{!}{=} \Omega_n(\dots, \vec{a}_i, \dots) + \Omega_n(\dots, \vec{b}_i, \dots) \quad (*)$$

finde $\vec{u} = \sum_{l \neq i} u_l \vec{a}_l$ so, dass $\vec{a}_i + \vec{u} \parallel \vec{a}_i + \vec{b}_i$

und $\vec{b}_i - \vec{u} \parallel \vec{a}_i + \vec{b}_i$!

<u>1. Fall</u>: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linear <u>unabhängig</u>;

$$\rightarrow \boxed{\vec{b}_i = \lambda \vec{a}_i + \vec{c}} \quad \text{mit } \vec{c} = \sum_{l \neq i} c_l \vec{a}_l \quad ;$$

<u>Falls $\lambda = -1$</u>, so $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots \vec{a}_n$ linear abhängig

und $\Omega_n(\dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots) = 0$; ferner $\Omega_n(\dots, \vec{b}_i, \dots) =$

$$\Omega_n(\ldots, -\vec{a}_i + \vec{z}, \ldots) \overset{(V6)}{=} \Omega_n(\ldots, -\vec{a}_i, \ldots) \overset{V1}{=} -\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

damit (*) gezeigt.

<u>falls $\lambda \neq -1$</u> : setze $\boxed{\vec{u} = \frac{1}{1+\lambda}\vec{z}}$

dann

$$\left.\begin{aligned} \underline{\vec{a}_i + \vec{u}} &= \vec{a}_i + \frac{1}{1+\lambda}(\vec{b}_i - \lambda\vec{a}_i) = \frac{1}{1+\lambda}\underline{(\vec{a}_i + \vec{b}_i)}\,; \\ \underline{\vec{b}_i - \vec{u}} &= \vec{b}_i - \frac{1}{1+\lambda}(\vec{b}_i - \lambda\vec{a}_i) = \frac{\lambda}{1+\lambda}\underline{(\vec{a}_i + \vec{b}_i)} \end{aligned}\right\} (\square)$$

$$\to \Omega(\ldots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \ldots) = \left(\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\Omega_n(\ldots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \ldots)$$

$$= \frac{1}{1+\lambda}\Omega_n(\ldots) + \frac{\lambda}{1+\lambda}\Omega_n(\ldots)$$

$$\overset{(V1)}{=} \Omega_m\left(\ldots, \frac{1}{1+\lambda}(\vec{a}_i + \vec{b}_i), \ldots\right) + \Omega_m\left(\ldots, \frac{\lambda}{1+\lambda}(\vec{a}_i + \vec{b}_i), \ldots\right)$$

$$\overset{(\square)}{=} \Omega_m(\ldots, \vec{a}_i + \vec{u}, \ldots) + \Omega_m(\ldots, \vec{b}_i - \vec{u}, \ldots)$$

$$\overset{(V6)}{=} \Omega_m(\ldots, \vec{a}_i, \ldots) + \Omega_m(\ldots, \vec{b}_i, \ldots) \quad \text{d.h. } (*).$$

<u>2. Fall</u> : $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear <u>ab</u>hängig ;

<u>Falls</u> dann $\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{a}_n$ linear <u>un</u>abhängig, vertausche $\vec{a}_i$ mit $\vec{b}_i$ und verfahre wie im 1. Fall, ✓

<u>andernfalls</u> $\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots, \vec{a}_n$ lin. <u>ab</u>hängig
$\to$ alle Terme $= 0$. ✓

damit (V8) gezeigt.

• (V9) : $\Omega_m(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) \overset{(V2)}{=} \Omega_m(\ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_j \ldots)$

$$\overset{(V1)}{=} -\Omega_m(\ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots, -\vec{a}_j, \ldots) \overset{(V2)}{=} -\Omega_m(\ldots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

$$\overset{(V_2)}{=} -\Omega_m(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i \ldots).$$

aus (V3), (V8) und (V9) gewinnen wir <u>explizite Formel</u> für $\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ in Komponenten a_{ij} der Vektoren:

gelte $\vec{a}_\ell = \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ \vdots \\ a_{n\ell} \end{pmatrix}_B = \sum_{i=1}^{n} a_{i\ell}\, \vec{e}_i \quad , \ \ell = 1, \dots, n$

$$\rightarrow \Omega_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \Omega_n\Big(\underbrace{\sum_{i_1} a_{i_1 1}\vec{e}_{i_1}}_{= \vec{a}_1}, \underbrace{\sum_{i_2} a_{i_2 2}\vec{e}_{i_2}}_{= \vec{a}_2}, \dots, \underbrace{\sum_{i_n} a_{i_n n}\vec{e}_{i_n}}_{= \vec{a}_n}\Big)$$

$$\overset{(V8)}{=} \sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_n} a_{i_1 1}\, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\ \Omega_n(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n})$$

mit <u>n-dim Levi-Civita-Symbol</u>

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} := \Omega_n(\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_n}) \overset{!}{=} \begin{cases} +1 : & (i_1 i_2 \cdots i_n) \text{ geht durch } \underline{\text{gerade}} \text{ Anzahl von Vertauschungen aus } (1\,2\,3 \cdots n) \text{ hervor} \\ -1 : & \text{— " — " — " —} \ \underline{\text{ungerade}} \text{ — " —} \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

(V3, V9)

also

$$\text{(V10)} \quad \boxed{\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}\, a_{i_1 1}\, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}}$$

<u>n=1</u> : $\varepsilon_1 = 1$, $\Omega_1(a) = a$ ✓

<u>n=2</u> : $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$;

$$\rightarrow \Omega_2(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \varepsilon_{12}\, a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21}\, a_{21} a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \ ✓$$

$\underline{n=3}$: offenbar $\varepsilon_{ijk} \equiv \langle \vec{e}_i \times \vec{e}_j , \vec{e}_k \rangle = \Omega_3(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ ✓

$\underline{n=4}$: $\varepsilon_{1234} = 1 = \varepsilon_{2143} = \varepsilon_{4321} = \cdots$

$\varepsilon_{2134} = -1 = \varepsilon_{1243} = \varepsilon_{3421} = \cdots$

$\rightarrow \Omega_4(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + a_{21} a_{12} a_{43} a_{34} + \cdots$
$- a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{43} a_{34} - \cdots$

u.s.w.