Permutationen

grob: Permutation $\equiv$ Anordnung von Objekten in eine Reihenfolge (ohne Wiederholungen)

etwa:

- Permutationen der Obj. A, B, C, D: (A, C, B, D), (B, C, A, D), (D, C, B, A), ...

  ~~(A, B, B, C)~~

- Permutationen der Zahlen $1, 2, 3$: $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(1,3,2)$, $(3,2,1)$

genauer: Eine Permutation (auch: Anordnung) der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ist eine 1-zu-1-Abbildung*

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$i \longmapsto \sigma(i)$$

*: 1-zu-1-Abbildung bedeutet: jedes Bild hat genau ein Urbild

Notation: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$

z. B. für $n = 3$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

[alternative Notation: $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$

$\rightarrow$ $\sigma = (2,3,1)$, $\tau = (3,2,1)$; $\sigma \circ \tau = (1,3,2)$, $\tau \circ \sigma = (2,1,3)$]

- Menge aller Permutationen von $\{1,2,\dots,n\}$: S_n
- Anzahl " " " " " :

$$\boxed{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 =: n!}$$

„n Fakultät"

(= Anzahl Elemente in S_n)

n	1	2	3	4	5	6	...
$n!$	1	2	6	24	120	720	...

für $n \gg 1$: $\boxed{\ln n! \simeq n \ln n/e}$ vgl. Übg.

(d.h. $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n$)

- S_n mit Verkettung „$\circ$" bildet Gruppe, die sog. Symmetrische Gruppe
  - Abgeschlossenheit: $\sigma, \tau \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \tau \in S_n$ ✓
  - Assoziativität: $\sigma \circ (\tau \circ \rho) = (\sigma \circ \tau) \circ \rho$ ✓
  - Neutrales Element: $id \in S_n$, denn $id \circ \sigma = \sigma \circ id = \sigma$ ✓
  - Inverses: mit $\sigma \in S_n$ auch $\sigma^{-1} \in S_n$ und $\sigma \circ \sigma^{-1} = id$ ✓

Transposition (auch: Vertauschung)

$\tau_{ij} \in S_n$ vertauscht i mit j, d.h.:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & 2 & & j & & i & & n \end{pmatrix}$$

Satz: Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann in Transpositionen zerlegt werden, d.h.

$$\sigma = \tau_{i_k j_k} \circ \tau_{i_{k-1} j_{k-1}} \circ \dots \circ \tau_{i_2 j_2} \circ \tau_{i_1 j_1} \, .$$

$\uparrow$ nicht eindeutig

Def.: ist k gerade, so ist die Zerlegung gerade
" " ungerade, " " " " " ungerade

Satz: Die Zerlegungen einer Permutation σ sind entweder alle gerade, – dann heißt σ gerade –, oder alle ungerade, – " " σ ungerade.

Def.: Das Vorzeichen (Signum) einer Permutation σ ist erklärt durch

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} +1 & : \ \sigma \text{ gerade} \\ -1 & : \ \sigma \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beispiele:

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1 ; \quad \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +1$$

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

aufgrund Eigenschaft (V9) gilt also für $\sigma \in S_n$:

$$\Omega_n(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \, ;$$

insbesondere:

$$\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(n)} \equiv \Omega_n(\vec{e}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

d.h.

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \begin{cases} +1 & : (i_1 i_2, \dots, i_n) \text{ gerade Permutation} \\ -1 & : (i_1 i_2, \dots, i_n) \text{ ungerade Permutation} \\ 0 & : (\;\text{"}\qquad\text{"}\;) \text{ keine Permutation} \end{cases}$$

(d.h. mindestens ein Index doppelt)

und somit:

$$\boxed{\Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} a_{i_1 1}\, a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\, \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

Leibniz-Formel für Ω_n

$$\overset{!}{=} \boxed{\sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}\, \operatorname{sgn}(\sigma)}$$

Definition:

Die Determinante $\det A$ einer $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

ist genau das orientierte Volumen der Spaltenvektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \text{d.h.}$$

$$\boxed{\det A = \Omega_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}\, \operatorname{sgn}(\sigma)}$$

⌈ alternative Notation:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ⌋

<u>Anwendungen</u>:

- historisch: Lösungen des <u>linearen Gleichungssystems</u> $A\vec{x} = \vec{0}$, d.h. genau

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

wir wissen: ist $\det A \neq 0$, so gibt es <u>nur</u> die <u>triviale Lösung</u> $\vec{x} = 0$

⌈ denn $\det A \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear <u>un</u>abhängig

$\rightarrow \vec{a}_1 x_1 + \cdots + \vec{a}_n x_n = \vec{0}$ erfordert $x_1 = \cdots = x_m = 0$, d.h. $\vec{x} = 0$. ⌋

tatsächlich gilt: $\det A = 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} A\vec{x} = 0$ besitzt Lösung(en) $\vec{x} \neq 0$

- mehrdimensionale Integration: – <u>Volumenbestimmung</u>
  – <u>Transformationssatz</u>

- Eigenwertproblem:

$$A\vec{x} \overset{!}{=} \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (A - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda\mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$$

im klassischer Mechanik (z.B. Schwingungen)

und Quantenmechanik (Eigenzustände) .