Eigenschaften der Determinante

ergeben sich unmittelbar aus denen des orient. Volumens Ω_n (V1 – V10); insbesondere

- Spaltenlinearität

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i + \lambda \vec{b}_i, \ldots) =$$

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots) + \lambda \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}_i, \ldots)$$

- Scherinvarianz

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i + \underline{\underline{\vec{u}}}, \ldots \vec{a}_n)$$

$$\text{wobei} \quad \vec{u} = \sum_{\substack{l, \\ \underline{\underline{l \neq i}}}} \lambda_l \vec{a}_l$$

- $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$

- Autisymmetrie

$$\det(\ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_j, \ldots) = - \det(\ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_i, \ldots)$$

zudem:

für Matrix $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \ldots, n\}}$ ist

- $$\det A \equiv \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn} \sigma$$

$$\overset{!}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \operatorname{sgn} \sigma \qquad (*)$$

⌜ denn: Für bel. $\sigma, \varrho \in S_n$ gilt offenbar

$$a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \overset{!}{=} a_{\sigma(\varrho(1))\varrho(1)}\, a_{\sigma(\varrho(2))\varrho(2)} \cdots a_{\sigma(\varrho(n))\varrho(n)};$$

insbesondere also für $\varrho = \sigma^{-1}$:

$$a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)}\, a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)};$$

d.h. $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \underbrace{\operatorname{sgn}\sigma}_{\overset{!}{=}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})}$$

$$= \sum_{\tilde\sigma \in S_n} a_{1\tilde\sigma(1)} \cdots a_{n\tilde\sigma(n)} \operatorname{sgn}\tilde\sigma$$

$\tilde\sigma = \sigma^{-1}$ ⌟

(*) bedeutet offenbar, dass sich die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ bzgl. deren Spalten $\vec{a}_\ell = \begin{pmatrix} a_{1\ell} \\ a_{2\ell} \\ \vdots \\ a_{n\ell} \end{pmatrix} \equiv (a_{i\ell})_i$

genau wie zu deren Zeilen $\vec{a}_k^{\,T} = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$
$\equiv (a_{ki})_i$

verhält.

→
- Zeilenlinearität
- Scherinvarianz bzgl. Zeilenaddition
- Antisymmetrie bzgl. Zeilenvertauschung

usw.

ebenso folgt aus (*):

$$\boxed{\det A = \det A^T}$$

wobei die transponierte Matrix A^T der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

durch

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Berechnung der Determinante / des orient. Volumens

$n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \Omega_2\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$$

$n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \equiv \Omega_3(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k = \cdots$$

Merkregel von Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \quad \hat{=} \qquad \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \overset{!}{=}$$

$$\oplus\ a_1 b_2 c_3 \ \oplus\ b_1 c_2 a_3 \ \oplus\ c_1 a_2 b_3$$

$$\ominus\ a_3 b_2 c_1 \ \ominus\ b_3 c_2 a_1 \ \ominus\ c_3 a_2 b_1$$

$\ominus$ $\oplus$

$\underline{n=4}$: direkte Berechnung mittels Leibniz-Formel wegen $n! \approx (n/e)^n$ Summanden ineffizient;

besser: <u>Gauß-Verfahren</u> (s.u.)

zuerst sehr einfacher Spezialfall:

<u>A Diagonalmatrix</u>, d.h. $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$$= (d_1 \vec{e}_1, d_2 \vec{e}_2, \ldots, d_n \vec{e}_n)$$

$$\to \det A = \Omega_n(d_1 \vec{e}_1, \ldots, d_n \vec{e}_n) = d_1 d_2 \cdots d_n \underbrace{\Omega_n(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)}_{=1}$$

$$\boxed{\det A = d_1 d_2 \cdots d_n}$$

etwas komplizierter:

<u>A obere Dreiecksmatrix</u>, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & d_2 & b_{23} & & b_{2n} \\ 0 & 0 & d_3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & d_n \end{pmatrix}$$

$$\to \boxed{\det A} = d_1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & d_2 & b_{23} & & b_{2n} \\ & & d_3 & & \vdots \\ & & & & d_n \end{pmatrix} = d_1 d_2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & 1 & 0 & & 0 \\ & & d_3 & b_{34} & \cdots \\ & & & \ddots & d_n \end{pmatrix}$$

Linearität, Scherinvarianz

$$= \cdots = \boxed{d_1 d_2 \cdots d_n}$$

jetzt allgemeine Matrix $A = (a_{ij})$:

- Forme A mittels "Scherungen" und ggf. Spalten- bzw. Zeilenvertauschungen in obere Dreiecksmatrix $\tilde{A}$ um

$$\rightarrow \det A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bestimmt durch Zahl der Vertauschungen.}}}{\pm} \det \tilde{A} = \pm \tilde{a}_{11} \tilde{a}_{22} \cdots \tilde{a}_{nn} . \qquad \text{(Gauß)}$$

explizit:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{n-1,1} & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a'_{n-1,1} & a'_{n-1,2} & & a_{n-1,n-1} & \\ 0 & 0 & & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$- \frac{a_{n2}}{a_{nn}} \cdot \vec{a}_n \qquad - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} \vec{a}_n \qquad\qquad - \frac{a'_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}} \vec{a}'_{n-1} \qquad - \frac{a'_{n-1,1}}{a'_{n-1,n-1}} \vec{a}'_{n-1}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a''_{11} & \cdots & a'_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a''_{n-2,1} & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & a'_{n-1,n-1} & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \cdots = \cdots =$$

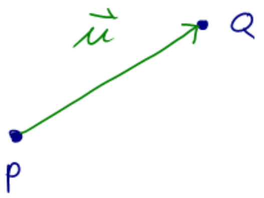
$$= \det \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & \cdots & \vdots \\ & \tilde{a}_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} = \cdots$$

Anzahl Rechenschritte $\leq \dfrac{n^3}{3} \ll n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Koordinatensysteme des euklidischen Raums E_3

<u>eukl. Raum E_3</u> $\hat{=}$ Gesamtheit aller Raumpunkte ;

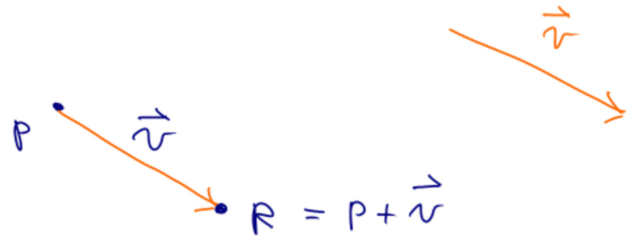
<u>kein</u> Vektorraum, aber je zwei Raumpkte $P, Q \in E_3$ bestimmen 3-dim Translations<u>vektor</u> :



$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} \in V$$

und umgekehrt : $P \in E_3$, $\vec{v} \in V$

$\rightarrow$ $R = P + \vec{v} \in E_3$; eindeutig bestimmt durch $\overrightarrow{PR} = \vec{v}$



($\rightarrow$ E_3 ist ein <u>affiner</u> Raum)

<u>kartesisches Koordinatensystem</u>

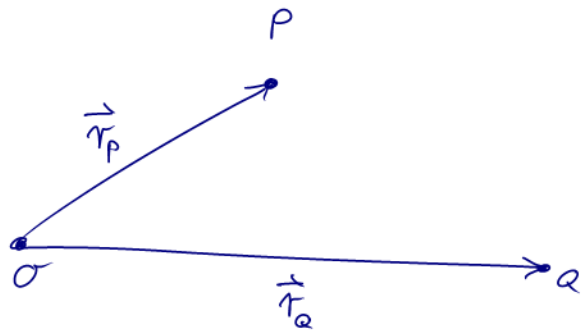
bestimmt durch 1) Ursprung $\mathcal{O} \in E_3$

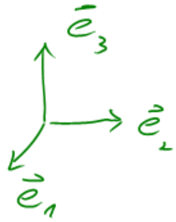
2) ONB $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ der Transl.

$\rightarrow$ bel. Raumpunkt $P \in E_3$ eindeutig beschrieben durch

<u>Ortsvektor</u> $\quad \overrightarrow{\mathcal{O}P} \equiv \vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$ von P bzgl. $\mathcal{O}$

(mit Kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 bzgl. B)





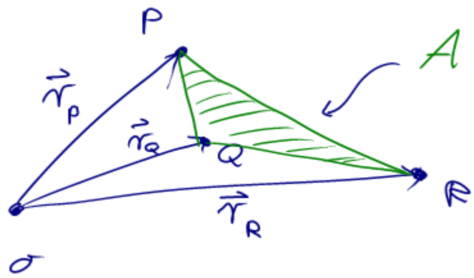
<u>Beispiele</u> / <u>Anwendungen</u>:

a) <u>Abstand</u> zweier Pkte P und Q mit Ortsvektoren $\vec{r}_P$ $(= \overrightarrow{\mathcal{O}P})$ und $\vec{r}_Q$ $(= \overrightarrow{\mathcal{O}Q})$:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{r}_P - \vec{r}_Q| = \left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$\uparrow \quad \vec{r}_P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B , \quad \vec{r}_Q = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_B$$

b) <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks P, Q, R :



$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}|$$

$$= \frac{1}{2} |(\vec{r}_R - \vec{r}_Q) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)|$$