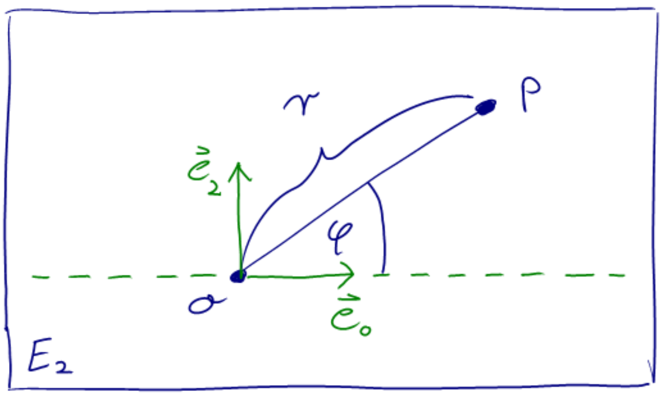
Polarkoordinaten (für euklidische Ebene E_2)

gegeben durch 1) Ursprung $\sigma \in E_2$

2) Richtung $\vec{e}_0$



→ Polarkoordinaten von P:

- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$

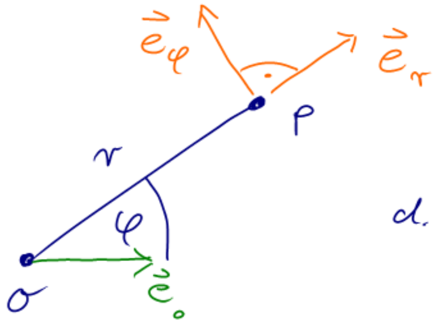
aus Polarkoordinaten (r, φ) eines Pkts P folgen seine kartesischen Koordinaten (x_1, x_2) bzgl. σ, $B = \{\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_0, \vec{e}_2\}$ gemäß

$$x_1 = r \cos\varphi$$
$$x_2 = r \sin\varphi$$

→ Ortsvektor von P (bzgl. σ): $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}_B$

Zweckmäßig: lokale ONB am Punkt P:

$$L = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi\}$$



d.h. $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_B$, $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_B$

somit gilt: $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$

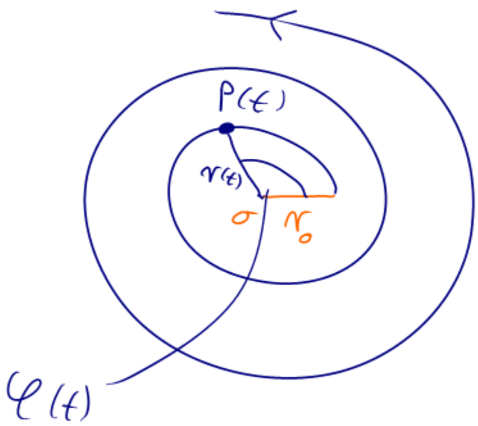
Anwendungsbeispiel:

Massenpunkt bewege sich in der Ebene gemäß **zeitabhängigen** Polarkoordinaten

$$r(t) = r_0 + v t$$
$$\varphi(t) = \omega t$$

$$\rightarrow \quad \vec{r}(t) = r(t) \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}}_{\hat{=}\, \vec{e}_r(t)} = (r_0 + v t) \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

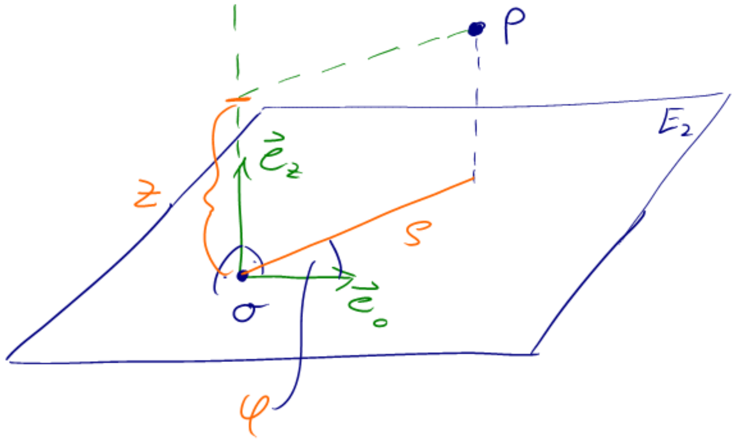
etwa:



Erweiterung um Koordinate $\perp$ zur Ebene ergibt

Zylinderkoordinaten (für E_3)

bzgl.
1) Ursprung O
2) Ebene E_2
3) Richtung $\vec{e}_0$ in E_2
4) Zylinderachse $\vec{e}_z \perp E_2$



<u>Zylinderkoordinaten</u> von $P \in E_3$:

- Radius $\varsigma \in \mathbb{R}_+$
- Winkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- „Höhe" $z \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ kartesische Koordinaten von P bzgl. σ, $B = \{ \vec{e}_1 \equiv \vec{e}_0, \vec{e}_2, \underset{\overset{\shortparallel}{\vec{e}_z}}{\vec{e}_3} \}$

$$x_1 = \varsigma \cos\varphi$$
$$x_2 = \varsigma \sin\varphi$$
$$x_3 = z$$

$\rightarrow$ Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} \varsigma \cos\varphi \\ \varsigma \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}_B$

lokale ONB $L = \{ \vec{e}_\varsigma, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z \}$ mit

$$\vec{e}_\varsigma = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_B ; \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_B ; \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

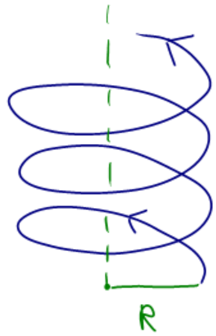
<u>beachte</u> : $\hat{r} \neq \vec{e}_\varsigma$; $|\vec{r}| = (\varsigma^2 + z^2)^{1/2} \neq \varsigma$

Anwendungsbeispiel

Massenpunkt bewege sich gemäß

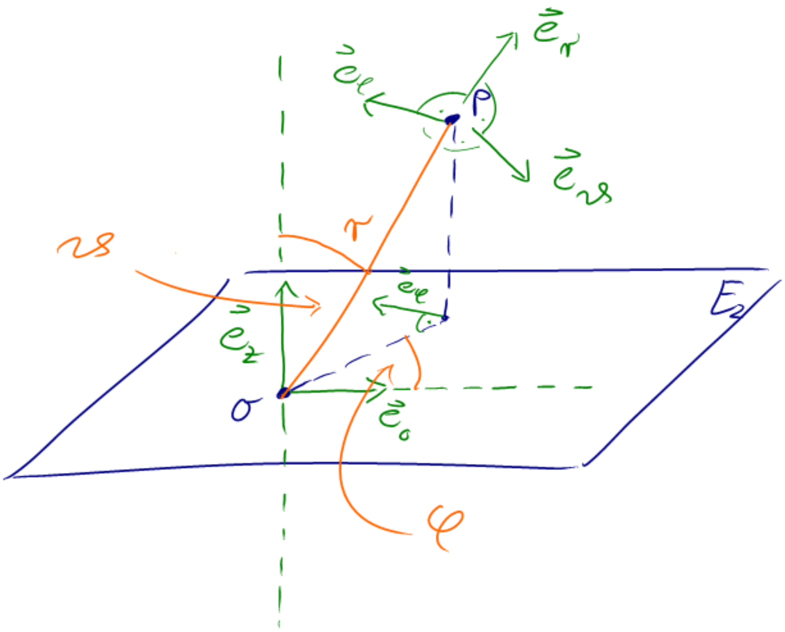
$$\rho(t) = R \qquad \varphi(t) = \omega t \qquad z(t) = v t \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ v t \end{pmatrix}_B$$

etwa:



Kugelkoordinaten

bzgl.
1) Ursprung $\mathcal{O}$
2) Ebene E_2
3) Richtung $\vec{e}_0$ in E_2
4) Polachse $\vec{e}_z$



- Radius $r \in \mathbb{R}_+$
- Azimuthwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$
- Polarwinkel $\vartheta \in [0, \pi[$

$\rightarrow$ kartesische Koordinaten bzgl σ, $B = \{ \vec{e}_1 \equiv \vec{e}_0, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{e}_z \}$

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$x_3 = r \cos\vartheta$$

$\rightarrow$ Ortsvektor $\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}_B$

Lokale ONB $L = \{ \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\vartheta \}$ mit

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}_B, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}_B$$

$\rightarrow$ $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$, $|\vec{r}| = r$