Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 11

Sommersemester 2016

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/mechanik2016.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 03.07.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

40. Trägheitstensor anschaulich

Wir betrachten folgende Konstruktion: Aus drei Paaren von jeweils gleichen Massen m_x, m_y und m_z, die frei wählbar sein sollen, werde ein Körper mithilfe von masselosen Achsen zusammengesetzt. Diese Achsen seien einfach durch die x-, y- und z-Achse gegeben. Jedes Massenpaar sei auf der jeweiligen Achse so angebracht, dass der Ursprung genau zwischen den beiden Massen liegt. Der Abstand zum Ursprung sei jedoch ebenfalls frei wählbar.

a) Skizzieren Sie die Konstruktion

b) Gegeben sei nun der Trägheitstensor I zu einem beliebigen Körper. Zeigen Sie, dass sich die vorherige Konstruktion so anpassen lässt, dass Sie ebendiesen Trägheitstensor reproduzieren können.

c) Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

41. Trägheitstensor und Geometrie des Würfels

Gegeben Sei ein masseloses, würfelförmiges Skelett der Kantenlänge a, das (nur hilfsweise) an den Ecken mit jeweils einer Punktmasse m bestückt werde. Nun sei eine Achse in beliebiger Richtung durch den geometrischen Mittelpunkt des Würfels gelegt. Wir wollen beweisen, dass die Summe der Abstandsquadrate d_i^2 der Eckpunkte von der Achse unabhängig von der Wahl der Richtung der Achse ist, dass also gilt:

$$\sum_{i=1}^{8} d_i^2 = 8\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Betrachten Sie hierzu den Trägheitstensor der Anordnung mit den acht Hilfsmassen m und zeigen Sie auf dieser Basis, dass die obige Summe unabhängig von der Wahl der Achse ist. Berechnen Sie dann unter geschickter Wahl der Achsrichtung diese Summe explizit und leiten so das Ergebnis $8\frac{a}{\sqrt{2}}$ her.

42. Gleichförmige Rotation

a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente eines Zylinders homogener Massendichte mit Höhe H und Radius R bzgl. des Zylinderschwerpunkts. Die Masse des Zylinders sei M.

b) Bestimmen Sie anhand des Ergebnisses aus **a)** auch die Hauptträgheitsmomente einer Scheibe des Radius R und einer geraden Stange der Länge H, jeweils bzgl. des Schwerpunkts. Die Masse sei jeweils M, ihre Verteilung jeweils homogen.

c) Der Zylinder aus **a)** rotiere nun mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um eine körperfeste und zugleich raumfeste Schwerpunktsachse, die mit der Zylinderachse den Winkel ϑ einschließe. Bestimmen Sie die kinetische Energie des rotierenden Zylinders.

d) Welches Drehmoment übt der rotierende Zylinder aus **c)** auf die Drehachse aus? (*Tipp:* Bestimmen Sie zuerst den Drehimpuls des rotierenden Zylinders in körperfesten Koordinaten und transformieren Sie diese dann in raumfeste Koordinaten. Der Drehimpulssatz erlaubt dann die Bestimmung des gesuchten Drehmoments.)

e) I_1, I_2 und I_3 seien die Hauptträgheitsmomente eines allgemeinen starren Körpers. Zeigen Sie, dass $I_1 + I_2 \geq I_3$. Unter welcher Bedinung gilt Gleichheit?

43. Scheibenpendel

Gegeben sei eine homogene Kreisscheibe mit Masse M und Radius R.

a) Berechnen Sie das Trägheitmoment der Scheibe bezüglich einer Schwerpunktsachse senkrecht zur Scheibenebene.

b) Berechnen Sie nun das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Achse senkrecht zur Scheibenebene durch einen beliebigen Punkt genau auf dem Rand der Scheibe. (**Tipp:** Satz von Steiner.)

c) Die Scheibe sei nun an diesem Randpunkt so aufgehängt, dass sie um die Achse senkrecht zur Scheibe im Schwerefeld der Erde frei schwingen kann. Diskutieren Sie das System mithilfe der Euler-Gleichungen oder des Lagrange-Formalismus und finden Sie die Lösungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage.