Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

PD. Dr. R. Klesse
Dr. Jochen Peschutter

Theoretische Physik I – Mechanik – Blatt 3

Sommersemester 2016

Webpage: *http://www.thp.uni-koeln.de/∼rk/mechanik2016.html/*

Abgabe bis Dienstag, den 03.05.2016, 13:00 in den Briefkasten vor dem Eingang des Instituts für Theoretische Physik.

Es sind Gruppenabgaben von bis zu drei Personen erlaubt. Bitte schreiben Sie leserlich und heften Sie Ihre Abgabe am oberen linken Rand zusammen. Versehen Sie Ihre Abgaben mit Ihren Namen sowie dem Namen Ihres Übungsgruppenleiters. Bitte beachten Sie die Hinweise zum Übungsbetrieb auf der oben genannten Homepage zur Vorlesung.

8. Ein Stabpendel auf der Waage

Ein massiver Stab der Masse M und Länge L ist an einem Ende frei drehbar in einem Lagerpunkt eines Gestells (vernachlässigbare Masse) aufgehängt. Das Gestell mitsamt dem frei pendelnden Stab ruht auf einer Waage. Das Pendel werde aus seiner Ruhelage um einen Winkel φ_0 ausgelenkt und aus dieser Lage losgelassen. Daraufhin führt es eine harmonische Pendelbewegung mit Amplitude φ_0 und Frequenz ω aus. Was zeigt die Waage während des Pendelns an? Welche Kraft wirkt dabei auf den Lagerpunkt des Gestells?

9. Schwerpunktsberechnung

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass der Schwerpunkt eines Systems von N Punktteilchen der Massen m_i mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ (für $i = 1, 2, \ldots, N$) durch den Ausdruck $\mathbf{R} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \mathbf{r}_i$ mit der Gesamtmasse $M := \sum_{i=1}^{N} m_i$ gegeben ist. Bei der Schwerpunktsberechnung von makroskopischen Körpern (z.B. eines Bechers) ist eine Unterteilung in die (Quasi-) Punktteilchen, nämlich die Atome, viel zu aufwendig und daher wenig sinnvoll. Statt jeden einzelnen Ortsvektor und die dazugehörige Atommasse zu berücksichtigen, fassen wir eine größere Gruppen von Punktteilchen zu Massenelementen $\mathrm{d}M(\mathbf{r})$ mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ zusammen. Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist wiederum als Ortsvektor des Schwerpunktes von $\mathrm{d}M(\mathbf{r})$ zu verstehen. Dann ist der Gesamtschwerpunkt – analog zu der Formel für N Punktteilchen – durch

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \int_{\text{Körper}} \mathrm{d}M(\mathbf{r}) \, \mathbf{r}$$

gegeben. Um den Gesamtschwerpunkt praktisch zu berechnen, müssen wir also nur den makroskopischen Körper sinnvoll (d.h. angepasst an seine mögliche Symmetrie) in kleine Massenelemente $\mathrm{d}M(\mathbf{r})$ unterteilen. Das geschieht durch geeignete Wahl des Koordinatensystems (z.B. für einen kugelförmigen Körper Kugelkoordinaten) und Benutzung des jeweiligen Volumenelements $\mathrm{d}V(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}M(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})}$. Die Massendichte $\rho(\mathbf{r})$ ist in den einfachsten Fällen homogen, also ortsunabhängig ($\rho(\mathbf{r}) \equiv \rho$) innerhalb des Körpers. Dann ergibt sich für die Masse des makroskopischen Körpers

$$M := \int_{\text{Körper}} \mathrm{d}V(\mathbf{r}) \, \rho$$

und für seinen Schwerpunkt

$$\mathbf{R} := \frac{1}{M} \int_{\text{Körper}} \mathrm{d}V(\mathbf{r})\; \rho\, \mathbf{r}.$$

a) Berechnen Sie den Ortsvektor des Schwerpunkt eines Vollzylinders mit Länge L, Radius R und Massendichte ρ. Nutzen Sie bei der Wahl des Koordinatensystems die Symmetrie des Problems!

b) Derselbe Vollzylinder wird nun der Länge nach halbiert. Wo liegt der Schwerpunkt einer der beiden Hälften nun?

c) Berechnen Sie nun den Ortsvektor des Schwerpunkt eines Vollkegels mit Höhe H, Radius R der Grundfläche und Massendichte ρ. Wie verändert sich die Lage des Schwerpunktes unter Scherung des gesamten Kegels parallel zur Grundfläche?

d) Ohne zu rechnen, argumentieren Sie, warum Ihr Wasserglas am stabilsten steht, wenn Sie es (nach und nach) so weit mit Wasser füllen, bis Schwerpunkt und Flüssigkeitsspiegel zusammenfallen.

10. Phasenraumportrait

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Phasenraumportraits beschäftigen.

a) Zunächst betrachten wir das System einer frei fallenden Masse m im homogenen Gravitationsfeld unter Vernachlässigung der Reibungskraft. Wir beschränken uns außerdem auf eine Dimension, also auf die Höhe $h(t)$ als einzige relevante Ortskoordinate. Zeichnen Sie das Phasenraumportrait.

b) Nun betrachten wir das sog. *mathematische Pendel*: Eine Punktmasse m ist hierbei mittels einer als masselos anzunehmenden Pendelstange an einer Achse befestigt und kann sich nur in der zur Achse senkrechten Ebene bewegen. Auch hier ist die Bewegung der Punktmasse eindimensional und beschrieben durch die Auslenkung $\phi(t)$ aus der Ruhelage bei $\phi = 0$. Fertigen Sie qualitativ (also ohne zu rechnen) das Phasenraumportrait des Systems an, indem Sie zunächst nur überlegen, wie sich das System im Phasenraum entwichkelt, wenn Sie die Punktmasse von der Ruhelage aus mit sehr kleinen bzw. sehr großen Anfangsgeschwindigkeiten starten lassen. Was geschieht bei mittleren Geschwindigkeiten?

11. Körper im Zentralkraftfeld

Gegeben sei das Zentralkraftfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\beta}{r^4}\hat{\mathbf{r}}.$$

a) Bestimmen Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ für ein Teilchen der Masse m mit Drehimpulsbetrag $l := |\mathbf{L}|$ im Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

b) Bestimmen Sie die Stelle r_0 und den Wert $U_{\text{eff}}(r_0)$ des Maximums von $U_{\text{eff}}(r)$.

c) Diskutieren Sie qualitativ die verschiedenen Typen von Bahnkurven (insbesondere diejenige mit $E = U_{\text{eff}}(r_0)$), die in diesem Potential möglich sind.

d) Nun seien $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\beta = 1\,\mathrm{Nm}^4$, $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 1\,\mathrm{m} \\ 2\,\mathrm{m} \\ 3\,\mathrm{m} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ -8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ 0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{pmatrix}$ zur Zeit $t = 0$ gegeben. Fällt das Teilchen unter diesen Anfangsbedingungen in das Kraftzentrum oder entweicht es ins Unendliche?