

---

## Statistische Mechanik Blatt 1

---

*Wintersemester 2010/11*

**Abgabe:** *Freitag 22. Oktober, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.  
Bitte Übungsgruppe und eigenen Namen gut sichtbar angeben!*

**Internetseite:** *[www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech\\_ws10](http://www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10)*

### 4. Der gezinkte Würfel

*2+2+2+2 Punkte*

Ein gezinkter Würfel mit Ergebnismenge  $\{1, \dots, 6\}$  und Elementarwahrscheinlichkeiten  $P(i) = i/21$  wird geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl

- a) kleiner 4,
- b) gerade,
- c) ungerade,
- d) gleich 1 oder 6 ist

### 5. Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

*2+4+4 Punkte*

$E$  und  $F$  seien zwei Ereignisse eines Zufallsexperiments. Zeigen Sie anhand der Axiome W1-W3 folgende Eigenschaften:

- a)  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
- b)  $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$  und  $P(F \setminus E) = P(F) - P(E)$
- c)  $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

### 6. Laplace'sche Wahrscheinlichkeiten

*3+3+4 Punkte*

In einer Urne befinden sich zehn von 1 bis 10 durchnummerierte Kugeln. Bestimmen Sie die Laplace'schen Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- a) Es werden 10 Kugeln aus der Urne gezogen (*ohne* Zurücklegen der Kugeln) und es erscheinen nacheinander alle 10 Kugeln in der Reihenfolge 1, 2, 3, ..., 9, 10.
- b) Es werden 4 Kugeln gezogen (wieder *ohne* Zurücklegen) und es erscheinen die Kugeln 1 bis 4 in Reihenfolge 1, 2, 3, 4.
- c) Es werden 4 Kugeln gezogen (*ohne* Zurücklegen) und es erscheinen die Kugeln 1 bis 4 in *beliebiger* Reihenfolge.

## 7. Regenschirme und Gummistiefel

2+2+2+2+2 Punkte

Zufällig die Hohe Straße passierende Passanten benutzen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.1 einen Regenschirm und mit Wahrscheinlichkeit von 0.3 tragen sie Gummistiefel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.05 trägt ein Passant Gummistiefel und benutzt zudem einen Regenschirm. Bestimmen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Passant

- a) keine Gummistiefel trägt,
- b) keinen Regenschirm benutzt,
- c) Gummistiefel trägt oder einen Regenschirm benutzt,
- d) Gummistiefel trägt, aber keinen Regenschirm benutzt,
- e) einen Regenschirm benutzt, aber keine Gummistiefel trägt.

## 8. Näherungen

4+4+2 Punkte

- a) Beweisen Sie die Näherung

$$\ln(n!) \approx n(\ln(n) - 1)$$

[Tipp: Linke Seite vereinfachen und die dann auftretende Summe durch ein Integral nähern. Bei der Wahl der Integrationsgrenzen gibt es einen gewissen Spielraum, der das Ergebnis aber für unsere Zwecke nur unwesentlich beeinflusst.]

- b) Zeigen Sie mittels a) folgende Näherung des Binomial-Koeffizienten  $\binom{n}{l} \equiv \frac{n!}{l!(n-l)!}$  für den Fall  $l \equiv \lambda n$ :

$$\ln \binom{n}{\lambda n} \approx nH_2(\lambda),$$

wobei die *binäre Entropie*  $H_2(x)$  für  $x \in [0, 1]$  durch

$$H_2(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$$

gegeben ist.

- c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion  $H_2(x)$ .