
Statistische Mechanik Blatt 6

Wintersemester 2010/11

Abgabe: Freitag, 26. November, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.

Internetseite: www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10

26. Gleichverteilungssatz

5+5+10 Punkte

- a) Gegeben sei ein System mit F -dimensionalem Phasenraum ($F \gg 1$) und Hamiltonfunktion

$$H(\underline{x}) = \sum_{i=1}^F \alpha_i x_i^2$$

mit $\alpha_i > 0$. Das Phasenraumvolumenmaß sei $dV = dx_1 dx_2 \cdots dx_F$, also flach. Zeigen Sie, dass für das mikrokanonische Ensemble eines solchen Systems gilt:

$$E = \frac{F}{2} k_B T, \quad E_i := \langle \alpha_i x_i^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

d.h. jeder Freiheitsgrad trägt im Mittel die Energie $k_B T/2$.

Hinweis: Beim Berechnen von $S(E)$ hilft wieder einmal ein Skalierungstrick.

- b) Ein einfaches Modell für einen Festkörper mit N Atomen erhält man, wenn man jedes der Atome als dreidimensionalen harmonischen Oszillator um seine Ruheposition betrachtet:

$$H(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N, \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2} q_i^2$$

Zeigen Sie, dass für einen so modellierten Festkörper gilt:

$$C_V = 3k_B N$$

- c) Ein zweiatomiges Molekül (Masse eines Atoms: m) hat in guter Näherung die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{q}, \varphi, \vartheta, r, \underline{p}, L_\varphi, L_\vartheta, p_r) = \frac{p^2}{m} + \frac{L_\varphi^2 / \sin^2(\vartheta) + L_\vartheta^2}{2I} + \frac{p_r^2}{m} + \frac{k}{2} r^2$$

Wobei der Vektor \underline{q} die Schwerpunktskoordinaten beschreibt, ϕ und θ die Kugelkoordinatenwinkel des Verbindungsvektors sowie r die radiale Auslenkung vom Ruheabstand; die restlichen Freiheitsgrade sind die zugehörigen kanonischen Impulse. I ist das Trägheitsmoment des Moleküls, k die Federkonstante der Molekülbindung. Zeigen Sie, dass für ein Gas mit N dieser Moleküle die Zustandsgleichungen

$$E = \frac{7}{2} k_B N T, \quad pV = N k_B T$$

gelten.

Hinweis: Zwei Dinge stören hier die direkte Anwendung von a): \underline{q} und φ gehen gar nicht in H ein, und ϑ nicht quadratisch. Passen Sie den Skalierungstrick entsprechend an.

27. Response-Funktionen

10 Punkte

Berechnen Sie die in der Vorlesung eingeführten $C_p, C_V, \kappa_T, \kappa_S, \alpha$ und β des zweiatomigen Gases aus 26 c).

Hinweis: Sie benötigen nur die auf dem Blatt angegebenen Zustandsgleichungen.

28. Adiabatische Kompression

10 Punkte

Ein zweiatomiges Gas werde ohne Wärmeaustausch komprimiert. Bestimmen Sie eine nichttriviale Funktion von T und V , die dabei konstant bleibt (z.B. in der Form $VT^k = \text{const}$), sowie eine Funktion von p und V . Wie stark erwärmt sich Luft ($T = 300K, p = 10^5 Pa$, hauptsächlich zweiatomig), wenn man einen Fahrradreifen adiabatisch aufpumpt (auf 1 Atü, $2 \cdot 10^5 Pa$)?