Institut für Theoretische Physik R. Klesse
der Universität zu Köln M. Moos

Statistische Mechanik
Blatt 7

Wintersemester 2010/11

Abgabe: *Freitag, 3. Dezember, bis 10 Uhr im grauen Kasten vor der Theorie.*

Internetseite: *www.thp.uni-koeln.de/~rk/statmech_ws10*

29. Carnot-Prozess

3+3+3+3 Punkte

Der Carnot-Kreisprozess für ein Gas (oder ein beliebiges anderes Arbeitsmedium) besteht aus vier Phasen:
1. Unter Kontakt mit einem kalten Wärmereservoir bei Temperatur T_1 wird das Gas isotherm komprimiert. Dabei gibt es Wärme Q_1 an das Reservoir ab und nimmt die Kompressionsarbeit W_1 auf.
2. Das Gas wird vom Wärmereservoir getrennt und adiabatisch weiter komprimiert, bis es die Temperatur T_2 erreicht hat. Dafür muss die Arbeit W_2 geleistet werden.
3. Nun wird das Gas in Kontakt mit einem warmen Wärmereservoir (Temperatur T_2) gebracht und isotherm expandiert. Dabei nimmt das Gas die Wärmemenge Q_2 auf und leistet die mechanische Arbeit W_3.
4. Das Gas wird wieder vom Reservoir getrennt und adiabatisch weiterexpandiert, bis es wieder die Temperatur T_1 erreicht hat. Dabei leistet es die Arbeit W_4.

Dieser reversible Prozess arbeitet hier als Wärme-Kraft-Maschine: er nimmt pro Zyklus die Nutzwärme Q_2 auf und gibt mechanische Arbeit $W_3 + W_4 - W_2 - W_1$ und Abwärme Q_1 ab.

a) Zeichnen Sie so einen Prozess in einem TS-Diagramm ein. Markieren Sie T_1 und T_2 und die Schritte 1-4. Wo und wie kann man Q_1 und Q_2 im Diagramm ablesen?

b) Zeigen Sie, dass $Q_2 - Q_1 = W_3 + W_4 - W_2 - W_1$ gilt.

c) Bestimmen Sie den Wirkungsgrad $\eta = \frac{W_3+W_4-W_2-W_1}{Q_2}$ (extrahierte Arbeit geteilt durch eingehende Wärmemenge) des Prozesses.

d) Zeigen Sie über den 2. Hauptsatz, dass keine Wärmekraftmaschine, die dasselbe Temperaturgefälle zwischen T_2 und T_1 nutzt, einen höheren Wirkungsgrad haben kann.

30. Maximale Boltzmann-Entropie

4+8 Punkte

Ein isoliertes makroskopische System bestehe aus K ebenfalls makroskopischen Teilsystemen $R_1, \dots, R_K$. Die Teilsysteme seien für sich jeweils im theromdynamischen Gleichgewicht und untereinander thermisch gekoppelt, d.h. Energieaustaussch unter ihnen ist möglich. Der Makrozustand des Gesamtsystems sei durch die Teilenergien $E_1, \dots, E_K$ der Teilsysteme gegeben.

a) Wie bestimmt sich die Boltzmann-Entropie $S(E_1, \dots, E_K)$ des Gesamtsystems anhand der Gleichgewichts-Entropien $S_i(E_i)$ der Teilsysteme?

b) Zeigen Sie, dass $S(E_1, \dots, E_K)$ bei gegebener Gesamtenergie $E = \sum_i E_i$ genau dann maximal ist, wenn alle Teilsysteme dieselbe Temperatur besitzen.

31. Phasenübergang

8+8 Punkte

Folgendes System ist ein sehr einfaches Modell für den Übergang zwischen flüssiger und gasförmiger Phase eines Stoffes.
Auf V quadratischen Gitterplätzen in zwei Dimensionen können sich N *ununterscheidbare* Teilchen frei bewegen ($1 \ll N \ll V$). Die Teilchen haben eine kurzreichweitige, anziehende Wechselwirkung. Die Energie E des Systems ist daher $-\epsilon$ mal die Anzahl der Teilchenpaare auf benachbarten Gitterplätzen ($\epsilon > 0$). Die kinetische Energie der Teilchen wird in dem Modell vollständig vernachlässigt.
In der flüssigen Phase sind alle Teilchen in einem zusammenhängenden Block ("Tropfen") kondensiert. In der gasförmigen Phase sind dagegen die Teilchen zufällig auf dem Gitter verteilt.

a) Begründen Sie folgende genäherten Ausdrücke der freien Energien der flüssigen und gasförmigen Phase:

$$F_f = -2N\epsilon \,,$$

$$F_g = -Tk_B N \ln \frac{V}{N} \,.$$

Anmerkung: berücksichtigen Sie die ununterscheidbarkeit der Teilchen und verwenden Sie $\ln N! \approx N \ln N$

b) Bestimmen Sie anhand a) die Übergangstemperatur und die latente Wärme des flüssig–gasförmig Phasenübergangs. Skizzieren Sie zudem die freie Energie als Funktion der Temperatur.