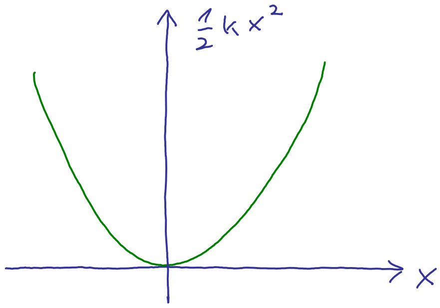
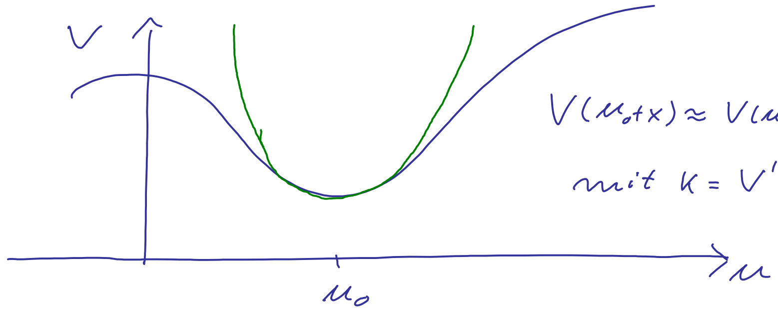
Harmonischer Oszillator

Masse m, Frequenz ω:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{=k}\hat{x}^2$$



etwa zur Beschreibung kleiner Schwingungen um stabile Gleichgewichtslage.



$V(u_0+x) \approx V(u_0) + \frac{k}{2}x^2$

mit $k = V''(u_0)$

→ relevant in allen Bereichen der Physik

wir zeigen:

Eigenenergien des harm. Oszillators:

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Energieeigenfunktionen $\varphi_n(x)$ $\left(\equiv \langle x | \varphi_n \rangle \right)$

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi \ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/2\ell^2}$$

mit $\ell = \sqrt{\hbar / m\omega}$

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_n(x)$$

beachte: bis auf Nullpunktsenergie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$

ist E_n ganzzahliges Vielfaches von $\hbar\omega$:

$$E_n - E_0 = \hbar\omega n$$

$\hat{=}$ Plancks Quantenhypothese !

Wir zeigen obige Resultate mittels Operator-Methode (Dirac, Born, ...):

Ausgangspunkt: Operatoren b und b^+:

$$\boxed{\begin{aligned} b &:= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \\ b^+ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \end{aligned}} \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\ell} + i\frac{\ell\hat{p}}{\hbar}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\ell} - i\frac{\ell\hat{p}}{\hbar}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \quad [b, b^+] = \frac{m\omega}{2\hbar}\left[x + \frac{ip}{m\omega}, x - \frac{ip}{m\omega}\right]$$

$$= \frac{-i}{2\hbar}\Big(\underbrace{[x, p]}_{i\hbar\mathbb{1}} - \underbrace{[p, x]}_{-i\hbar\mathbb{1}}\Big) = \mathbb{1} \quad !$$

$$\boxed{[b, b^+] = 1}$$

aus b, b^+ erhalten wir Ort- und Impulsoperatoren gemäß:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(b^+ + b) = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\,(b^+ + b)$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(b^+ - b) = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}\,\ell}\,(b^+ - b)$$

$$\rightarrow \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{4}\left(-(b^+ - b)^2 + (b^+ + b)^2\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(b^+ b + b\,b^+\right);$$

mit $b\,b^+ = [b, b^+] + b^+ b = 1 + b^+ b$ also

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(b^+ b + \tfrac{1}{2}\right)}$$

es bleibt zu zeigen: $\hat{N} := b^+ b$ besitzt EWe $0, 1, 2, 3, \dots$

und Eigenzustände wie oben.

dazu: (i) $[N, b] = [b^+ b, b] = \overbrace{[b^+, b]}^{=-1}\, b = -b$

$[N, b^+] = [b^+ b, b^+] = b^+ \underbrace{[b, b^+]}_{=+1} = b^+$

(ii) für alle $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi | N | \psi\rangle = \langle \psi, b^+ b \psi\rangle = \langle b\psi, b\psi\rangle \overset{!}{\geq} 0$$

$\langle \psi | N | \psi\rangle = 0$ g.d.w. $b|\psi\rangle = 0$. $\longrightarrow$ EWe nicht negativ!

(iii) $|\varphi\rangle$ EZ. von $\hat{N}$ zum EW $\lambda > 0$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} b^+ |\varphi\rangle \\ b\, |\varphi\rangle \end{matrix}\right\} \text{ EZ von } \hat{N} \text{ zum EW } \left\{\begin{matrix} \lambda + 1 \\ \lambda - 1 \end{matrix}\right\}$$

mit $\| b^+ |\varphi\rangle \| = \sqrt{\lambda + 1}$

$\| b\, |\varphi\rangle \| = \sqrt{\lambda}$.

$\ulcorner$ denn: $\hat{N}\, b^+ |\varphi\rangle = \left([N, b^+] + b^+ \hat{N}\right) |\varphi\rangle$

$\overset{(ii)}{=} b^+ (1 + \hat{N}) |\varphi\rangle = b^+ (1 + \lambda) |\varphi\rangle$

$= (1 + \lambda)\, b^+ |\varphi\rangle$;

analog: $\hat{N}\, b |\varphi\rangle = (\lambda - 1)\, b |\varphi\rangle$;

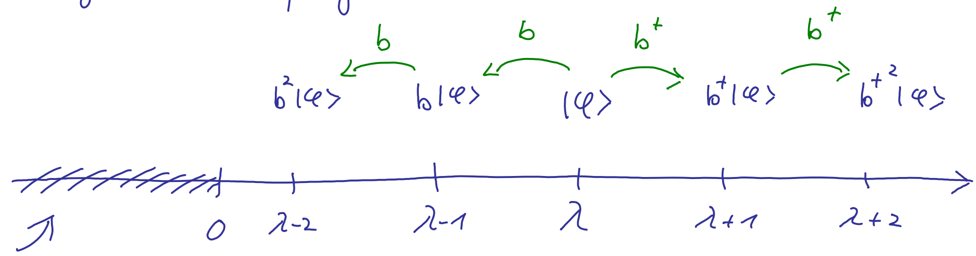
ferner: $\| b\, |\varphi\rangle \|^2 = \langle b\varphi, b\varphi\rangle = \langle \varphi | b^+ b | \varphi\rangle = \langle \varphi | \hat{N} | \varphi\rangle$

$= \lambda$; $\rightarrow \| b |\varphi\rangle \| = \sqrt{\lambda}$;

$\| b^+ |\varphi\rangle \|^2 = \langle \varphi | b\, b^+ | \varphi\rangle = \langle \varphi | [b, b^+] + \hat{N} | \varphi\rangle$

$= \langle \varphi | 1 + \lambda | \varphi\rangle = 1 + \lambda \rightarrow \| b^+ |\varphi\rangle \| = \sqrt{1 + \lambda}$ $\lrcorner$

somit ergibt sich folgendes Bild:



verboten, da nach (i) EWe ≥ 0

b^+ = "Aufsteiger"

b = "Absteiger"

wir schließen: $\boxed{\text{(iii) Widerspruchsfrei zu (ii) nur wenn } \lambda \in \mathbb{N} \text{ und } b|\varphi_0\rangle = 0}$

$\rightarrow$ $\hat{N}$ besitzt genau die EWe $0, 1, 2, 3, \ldots$

<u>Bestimmung des Grundzustands $|\varphi_0\rangle$:</u>

$$b\,|\varphi_0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \langle x|\underbrace{b}_{\frac{1}{\sqrt{2}\,\ell}\left(\hat{x} + i\frac{\ell^2}{\hbar}\hat{p}\right)}|\varphi_0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(x + \ell^2 \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0(x) \stackrel{!}{=} 0}_{(*)}$$

allg. Lösung der DGL (*) ist offenbar

$$\varphi_0(x) = c\; e^{-x^2/2\ell^2},$$

Normierung $1 = \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = \int dx\, |\varphi_0(x)|^2 = c^2 \underbrace{\int dx\; e^{-x^2/\ell^2}}_{=\sqrt{\pi\ell^2}}$

ergibt
$$\boxed{\varphi_0(x) = \frac{e^{-x^2/2\ell^2}}{(\pi\ell^2)^{1/4}}}$$

Relation $|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, b^+\, |\varphi_n\rangle$ führt mit

$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\ell} - \frac{i\ell}{\hbar}\hat{p}\right)$ und $\varphi_{n+1}(x) = \langle x|\varphi_{n+1}\rangle = \frac{\langle x|\,b^+\,|\varphi_n\rangle}{\sqrt{n+1}}$

auf
$$\boxed{\varphi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_n(x)}$$

$\blacksquare$