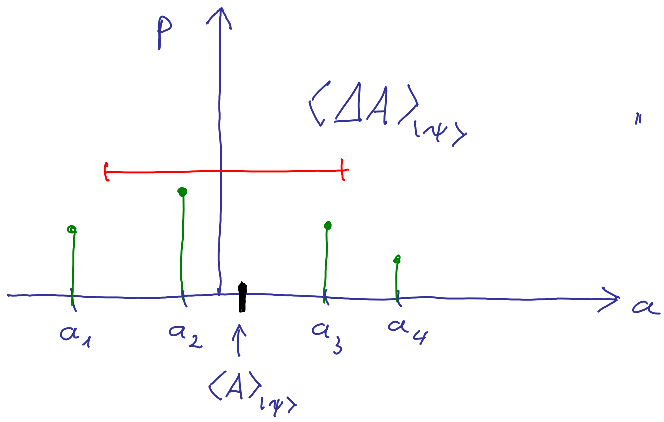
Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelationen

betrachte Messung der Observablen $\hat{A} = \sum_\ell a_\ell \, |\varphi_\ell\rangle\langle\varphi_\ell|$

im Zustand $|\psi\rangle$:

Messwert a_ℓ gemessen mit Wkt $p_\ell = |\langle\varphi_\ell|\psi\rangle|^2$,

etwa:



„A unscharf"

- Erwartungswert $\boxed{\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}$

- Standardabweichung

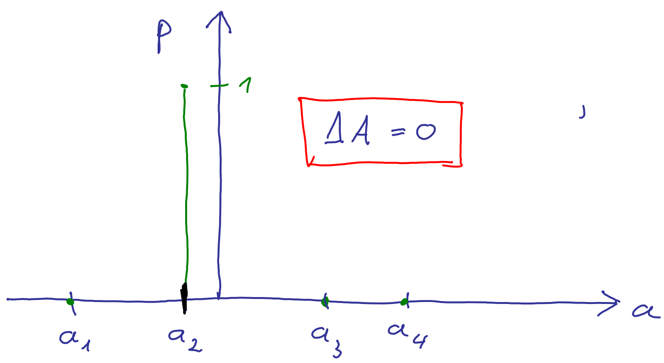
$$\boxed{\Delta A_{|\psi\rangle} := \sqrt{\left\langle \left(\hat{A} - \langle A\rangle_{|\psi\rangle}\right)^2 \right\rangle_{|\psi\rangle}}}$$

Spezialfall: System im Eigenzustand der Obs. $\hat{A}$:

etwa $|\psi\rangle = |\varphi_2\rangle$

$\rightarrow \quad p_\ell = |\langle\varphi_\ell|\psi\rangle|^2 = |\langle\varphi_\ell|\varphi_2\rangle|^2 = \delta_{\ell 2}$

$\rightarrow \quad \langle A\rangle_{|\psi\rangle} = a_2 \quad ; \quad \Delta A_{|\psi\rangle} = 0 \quad ;$



, „A scharf"

Offenbar gilt:

$$\boxed{\Delta A_{|\psi\rangle} = 0 \quad \text{g.d.w.} \quad |\psi\rangle \text{ Eigenzustand von } \hat{A}}$$

hieraus folgt: haben zwei Observablen A und B keine gemeinsamen Eigenzustände, so können A und B nicht zugleich exakt bestimmt („scharf") sein.

[d.h. für alle $|\psi\rangle$ $\Delta A_{|\psi\rangle} > 0$ oder $\Delta B_{|\psi\rangle} > 0$]

tatsächlich lässt sich wesentlich mehr sagen: für bel. $|\psi\rangle$

$$\boxed{\Delta A_{|\psi\rangle} \, \Delta B_{|\psi\rangle} \geq \frac{1}{2} \left| \langle i[A,B] \rangle_{|\psi\rangle} \right|} \qquad (1)$$

allg. Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation,

folgt direkt aus P1, P2 und somit fundamentale Eigenschaft der QM (und nicht etwa Folge unzureichender Messgeräte!)

Beispiel: Unbestimmtheit von Ort und Impuls eines Teilchens (1D):

bekanntlich $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, nach (1) also für Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$:

$$\Delta x_{|\psi\rangle} \, \Delta p_{|\psi\rangle} \geq \frac{1}{2} \left| \langle i[\hat{x},\hat{p}] \rangle_{|\psi\rangle} \right| = \frac{\hbar}{2}$$

kurz: (2)

$$\boxed{\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

(eigentliche) Heisenbergsche Unschärfenrelation

Ort und Impuls eines Teilchens können niemals zugleich exakt bestimmt werden!

Anwendungsbeispiel:

Wieviel <u>Energie</u> muss man mindestens investieren, um den <u>Ort</u> eines Teilchens der Masse m mit Genauigkeit $\Delta x = d$ zu bestimmen?

[etwa: 1) Ort eines Elektrons im H-Atom mit $d = \frac{1}{10}$ Å

2) " " " Protons im Atomkern " $d = \frac{1}{10}$ fm]

unter Vernachlässigung von potenzieller Energie:

$$E_{min} \geq \langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle \geq \frac{1}{2m} \underbrace{\langle (\hat{p} - \langle p \rangle)^2 \rangle}_{\substack{\parallel \\ \Delta p^2 \underset{(2)}{\geq} \frac{\hbar^2}{4 \Delta x^2}}}$$

d.h.
$$E_{min} \geq \frac{\hbar^2}{8 m d^2}$$

1) $m = m_e \approx 10^{-30}$ kg, $\hbar = 10^{-34}$ Js, $d = 10^{-11}$ m

$$\rightarrow E_{min} = 10^{-1-68+30+22} \, J \approx 10^{-17} \, J \approx \underline{\underline{100 \, eV}}!$$

$$1 \, eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \, eV$$

- $E_{min} \overset{!}{\gg} 1 \, Ryd \approx 13 \, eV \rightarrow$ gebundenes Elektron lässt sich <u>nicht</u> beobachten ohne H-Atom zu zerstören.

2) $m_p \approx 10^{-27}$ kg, $d = 10^{-16}$ m

$$\rightarrow E_{min} \approx 10^{-69+27+32+19} \, eV \approx 10^9 \, eV = \underline{\underline{1 \, GeV}}$$

$$1 \, GeV \gg W_{p\text{-Kern}} \approx 10 \, MeV = \frac{1}{100} \, GeV$$

Beweis der allg. Unbestimmtheitsrelation

(vgl. Straumann, QM)

Observable A, B, Zustand $|\psi\rangle$,

o. B. d. A. $\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = 0$; $\langle B\rangle_{|\psi\rangle} = 0$

(andernfalls $\tilde{A} = A - \langle A\rangle_{|\psi\rangle}$, $\tilde{B} = B - \langle B\rangle_{|\psi\rangle}$ betrachten);

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist

$$0 \overset{!}{\leq} \| (A + ixB)|\psi\rangle \|^2 = \langle\psi|(A - ixB)(A + ixB)|\psi\rangle$$

$$= \underbrace{\langle A^2\rangle_{|\psi\rangle}}_{= a^2} + x^2 \underbrace{\langle B^2\rangle_{|\psi\rangle}}_{= b^2} + x \underbrace{\langle i[A,B]\rangle_{|\psi\rangle}}_{= c}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$!

$$= a^2 + b^2\left(x^2 + \frac{cx}{b^2} + \left(\frac{c}{2b^2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2b^2}\right)^2\right),$$

d.h. $0 \leq a^2 + b^2\left(x + \frac{c}{2b^2}\right)^2 - \frac{c^2}{4b^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

insbesondere für $x = -c/2b^2 \implies 0 \leq a^2 - \frac{c^2}{4b^2}$

d.h. $a^2 b^2 \geq \frac{c^2}{4}$, also $\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle i[A,B]\rangle|$

∎