Interpretationen des quantenmechanischen Formalismus: Problem der Messung, quantenmechanische Verschränkung

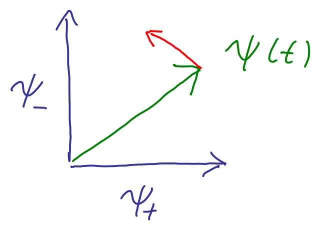
Feststellung: QM bietet ausgezeichnete Beschreibung der mikroskopischen Physik (cf. Atom-, Kern-, Festkörper, Teilchenphysik)

→ **Wunsch/Hypothese:** QM allgemeingültige Theorie! auch von makroskopischen Systemen, insbesondere von Messgeräten (und deren Beobachter ...)

aber: quantenmechanische Beschreibung des Messprozesses problematisch:

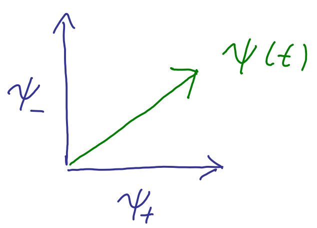
I: Zustandsentwicklung gemäß Schrödinger-Gl. (P1 + P3) kontinuierlich u. deterministisch:

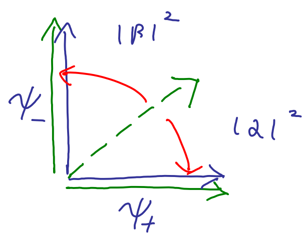
$$i\hbar\, |\dot{\psi}(t)\rangle = \hat{H}\, |\psi(t)\rangle \, ,$$



II: Zustandsentwicklung bei Messung (P1 + P2) diskontinuierlich und indeterministisch:

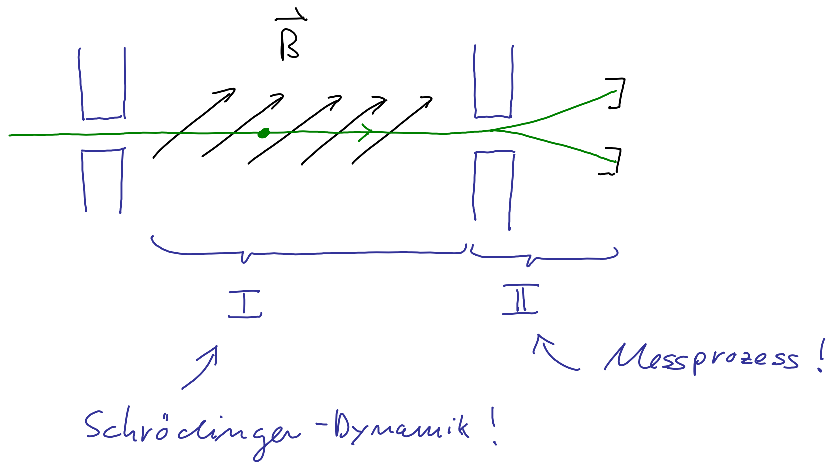
$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle \xrightarrow[\text{Messung}]{} \begin{cases} |\psi_+\rangle & \text{mit Wkt. } |\alpha|^2 \\ |\psi_-\rangle & \text{mit Wkt. } |\beta|^2 \end{cases}$$





"Kollaps der Wellenfunktion"

etwa im S.G. Experiment:



III allgemeingültige QM sollte auch System + Messgerät als ein q.m. Gesamtsystem während Messprozess mittels Schrödinger-Dynamik beschreiben können

Wie kann kontinuierliche u. deterministische Schrödinger-Dynamik I den diskontinuierlichen u. indeterministischen Messprozess ("Kollaps der Wellenfkt.") beschreiben?

seit ca. 1925 bis heute Gegenstand kontroverser Diskussionen!

Lösungsvorschläge:

1) QM nicht allgemeingültig, insbesondere ungeeignet zur Beschreibung von Messgeräten. (Bohr, Kopenhagener Deutung)

[Was zeichnet ein Messgerät von anderen Systemen aus?]

2) QM ist falsch bzw. unvollständig! z.B. weil

a) Dynamik nicht-linear sein könnte

→ Kollaps der Wellenfkt. aufgrund Dynamik
("echter Kollaps")

b) verborgene Variable nicht berücksichtigt wurden:

$$\underbrace{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \equiv |x+\rangle}_{QM} \longrightarrow (x+, \xi)$$

könnte insbes. Messausgang determinieren

(Bohm)

⌈ zu a) – nicht-lineare Theorien möglich, aber
i.d.R. sehr kompliziert und daher unattraktiv;
– bislang keine experimentelle Evidenz!

zu b) lokale, verborgene Variablen führen auf Bell'sche Ungleichungen, die in QM in Übereinstimmung mit Exp. verletzt werden können! ⌋

3) QM richtig und allgemeingültig, Kollaps des q.-m. Zustands nur scheinbar; in Wahrheit bleiben alle Superpositionen erhalten

→ „viele Welten" (Everett, ..., Wallace)

⌈ woher kommen die Bornschen Wahrscheinlichkeiten? ⌋

4) QM zwar richtig, aber keine Theorie einer objektiven, realen Welt, sondern nur ein Instrument zur Bestimmung von Messwerten in Experimenten. (Instrumentalismus)

⌈ zu wenig für eine physikalische Theorie?! ⌋

5) QM angewandt auf <u>makroskopische</u> Systeme erklärt <u>Nicht-Beobachtbarkeit makroskopischer</u> Superpositionen $\rightarrow$ Kollaps nur scheinbar: <u>Dekohärenz</u>

⌈ Messpostulat <u>nicht</u> entbehrlich,
$\rightarrow$ viele Welten ? ⌋

Im folgenden natürlich keine Aufhebung der Kontroverse, sondern nur explizitere Darstellung des Problems.

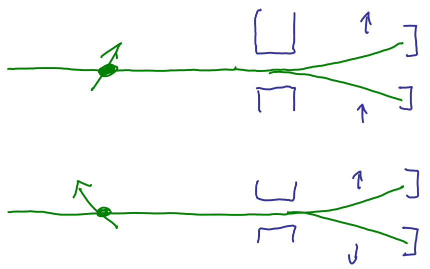
benötigen:

<u>QM zusammengesetzter Systeme</u>

<u>Beispiel</u>: magn. Dipolmomente <u>zweier</u> Ag Atome:

1. Atom

2. Atom



$\rightarrow$ 4 einander <u>ausschließende</u> Mess ergebnisse

$\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow$

1. 2. Atom

P1, P2

$\hat{=}$ 4 <u>orthonormale</u> Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$

$\rightarrow$ können <u>beliebig</u> superponiert werden (P1!), d.h. allg. Zustand $|\psi\rangle$ der zwei Ag-Atome lautet

$$|\psi\rangle = \alpha_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_{\downarrow\uparrow}|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle;$$

<u>allgemein</u>:

S_I q. m. System mit $\mathcal{H}_I = \text{Span}\{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_n\rangle\}$

S_{II} q. m. " " " " $\mathcal{H}_{II} = \text{Span}\{|\chi_1\rangle, \dots, |\chi_m\rangle\}$

$\longrightarrow \quad S_I S_{II}$ q.m. System mit

$$\mathcal{H}_{I,II} = \mathrm{Span}\{ |\varphi_1 \chi_1\rangle, |\varphi_1 \chi_2\rangle, \ldots, |\varphi_1 \chi_m\rangle, \\ |\varphi_2 \chi_1\rangle, |\varphi_2 \chi_2\rangle, \ldots, |\varphi_2 \chi_m\rangle, \\ \vdots \\ |\varphi_n \chi_1\rangle, |\varphi_n \chi_2\rangle, \ldots, |\varphi_n \chi_m\rangle \}$$

$=: \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$, <u>Tensorprodukt</u> von $\mathcal{H}_I$ und $\mathcal{H}_{II}$

<u>Notation:</u>

$$|\varphi_i \chi_j\rangle \equiv |\varphi_i\rangle |\chi_j\rangle \equiv \underbrace{|\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle}_{\text{Tensorprodukt von } |\varphi_i\rangle \text{ und } |\varphi_j\rangle} \equiv \varphi_i \otimes \chi_j$$

<u>Skalarprodukt</u> auf $\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$ def. durch:

$$\langle \psi_I \otimes \psi_{II}, \Phi_I \otimes \Phi_{II} \rangle \overset{!}{=} \langle \psi_I, \Phi_1 \rangle \langle \psi_{II}, \Phi_{II} \rangle$$

+ Linearität

<u>Offenbar gilt</u>:

- $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim \mathcal{H}_1 \cdot \dim \mathcal{H}_2$
- $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \ni |\psi\rangle \overset{!}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle$

<u>Vorsicht</u>:

ein Zustand / Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$ kann i. A. <u>nicht</u> als Tensorprodukt zweier Zustände / Vektoren $\psi_I \in \mathcal{H}_I$, $\psi_{II} \in \mathcal{H}_{II}$;

d.h. $\quad |\psi\rangle \neq |\psi_I\rangle \otimes |\psi_{II}\rangle$ für <u>alle</u> $|\psi_I\rangle, |\psi_{II}\rangle$!

→ <u>Definition</u>

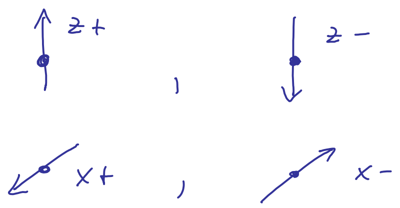
Ein q.m. Zustand von $S_I S_{II}$ mit Zustandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$, der <u>nicht</u> als Tensorprodukt zweier Zustandsvektoren aus $\mathcal{H}_I$ und $\mathcal{H}_{II}$ geschrieben werden kann ist ein <u>verschränkter Zustand</u> von $S_I S_{II}$ (bzgl. S_I und S_{II}).

(<u>E. Schrödinger</u> 1934)

<u>Beispiel</u>:

Ag I :

Ag II :



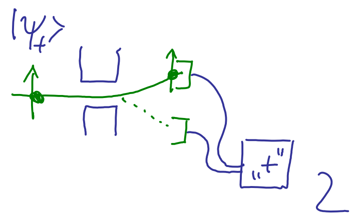
$|\psi_+\rangle|\varphi_+\rangle$, $|\psi_-\rangle|\varphi_-\rangle$ ← offenbar <u>nicht</u> verschränkt (≡ <u>separabel</u>)

$$|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle|\varphi_+\rangle + |\psi_-\rangle|\varphi_-\rangle\right)$$ <u>verschränkt</u>!

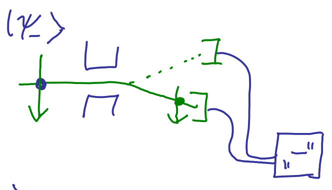
...

<u>Quantenmechanische Beschreibung eines Spinmessgeräts</u>

≙ <u>S.-G.-Magnet + Detektor</u>

1) 

~ $|d_+\rangle$

2) 

~ <u>Detektor</u>, Zustand $|d_-\rangle$

→ Zeitentwicklung des Systems "Spin + Detektor"

~ unitärer Operator U auf $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_D$

erfüllt:

1) $|\psi_+\rangle|0\rangle \xrightarrow{\mathcal{U}} |\psi_+\rangle|d_+\rangle \quad (= \mathcal{U}|\psi_+\rangle|0\rangle)$

2) $|\psi_-\rangle|0\rangle \xrightarrow{\mathcal{U}} |\psi_-\rangle|d_-\rangle \quad (= \mathcal{U}|\psi_-\rangle|0\rangle)$

Ausgangszustand des Detektors

Was geschieht bei Messung von $|\psi\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle$?

$$|\Phi\rangle_{SD} = \underbrace{|\psi\rangle|0\rangle}_{=(\alpha|\psi_+\rangle+\beta|\psi_-\rangle)|0\rangle} \longrightarrow |\Phi'\rangle_{SD} = \mathcal{U}|\psi\rangle|0\rangle = \alpha(\mathcal{U}|\psi_+\rangle|0\rangle) + \beta(\mathcal{U}|\psi_-\rangle|0\rangle)$$

$$= \alpha|\psi_+\rangle|d_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle|d_-\rangle$$

(seperabel) (verschränkt)

d.h. Spin + Detektor in Superposition

$\neq$ definitives Messergebnis „+" oder „−"!

Messung des Gesamtsystems Spin-Detektor (z.B. durch beobachtenden Experimentator) ergibt nach P2 folgende Wkten für $|\phi_+\rangle_{SD} \equiv |\psi_+\rangle|d_+\rangle$ bzw. $|\phi_-\rangle_{SD} \equiv |\psi_-\rangle|d_-\rangle$:

$$P_+ = |\langle \phi_+, \Phi'\rangle|^2 = |\langle \psi_+\otimes d_+, \alpha\psi_+\otimes d_+ + \beta\psi_-\otimes d_-\rangle|^2$$

$$= |\alpha\langle\psi_+,\psi_+\rangle\langle d_+,d_+\rangle + \beta\underbrace{\langle\psi_+,\psi_-\rangle}_{=0}\underbrace{\langle d_+,d_-\rangle}_{=0}|^2$$

$$= |\alpha|^2$$

analog: $P_- = |\beta|^2$

diese Wkten erhalten wir auch durch direkte Anwendung von P2 auf den System-Zustand $|\psi\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle$.