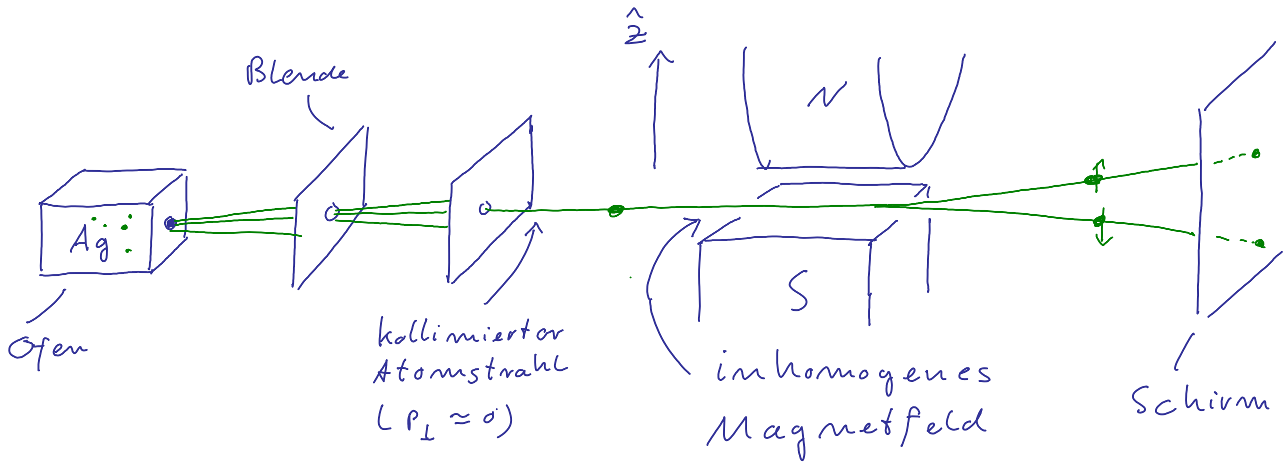
Quantenmechanik eines Zwei-Zustand-Systems

Sterm-Gerlach-Experiment (Otto Stern, Walther Gerlach Frankfurt 1922)



Ag-Atom trägt mag. Dipolmoment $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{n}$
($\mu_0 = e\hbar/2m_e c$, $\vec{n}$ = Richtungsvektor)

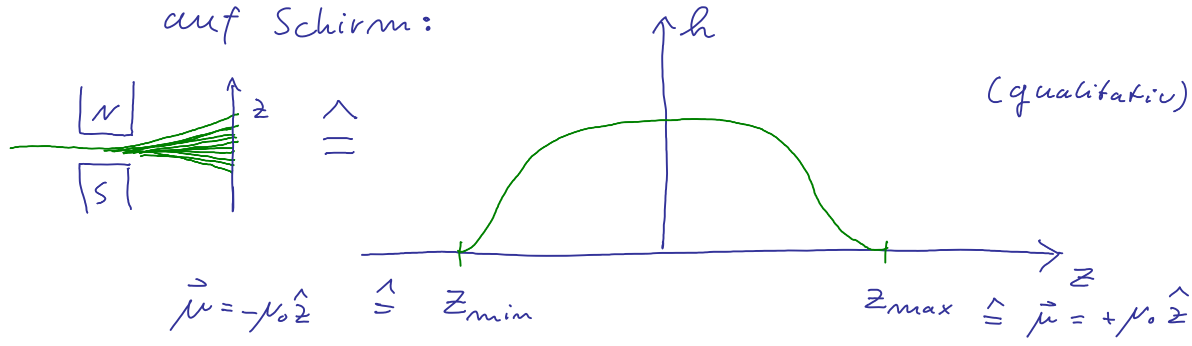
$\rightarrow$ erfährt im inhomogenen Magnetfeld $\vec{B} \simeq B(z)\,\hat{z}$

Kraft $\quad \vec{F} = (\vec{\mu}\cdot\hat{z})\, B'(z)\, \hat{z}$,

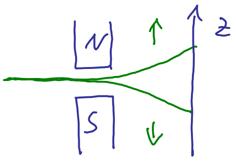
$$\boxed{\text{d.h. Ablenkung eines Ag-Atom im SG-Magnet ist direkt proportional der z-Komponente seines mag. Dipolmoments } \vec{\mu}}$$

"klassische" Erwartung: mag. Momente der Ag-Atome vor SG-Magnet zeigen in zufällige Richtungen, d.h. $\vec{n}$ gleichmäßig verteilt

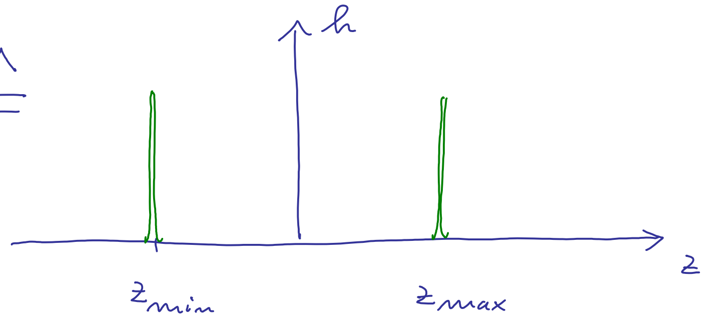
$\rightarrow$ entsprechend zufällig verteilte Positionen der AG-Atome auf Schirm:



<u>Experiment</u> zeigt dagegen immer nur $\pm \mu_0 \hat{z}$!



$\hat{=}$

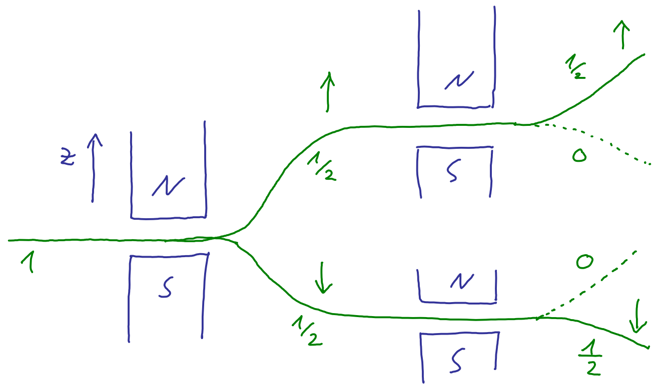


d.h. alle Momente sind parallel oder antiparallel zur z-Achse ausgerichtet: <u>Richtungsquantisierung</u>

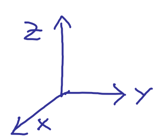
(wegen $\vec{\mu} \propto \vec{L}_{Ag}$ bedeutet dies zugleich <u>Drehimpuls-quantisierung</u> $\rightarrow$ Nobelpreis für O. Stern und W. Gerlach 1943)

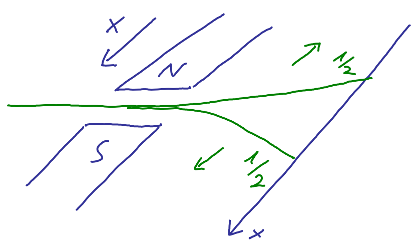
weitere Experimente (einfacher mit <u>Photonen</u>) zeigen:

(i)



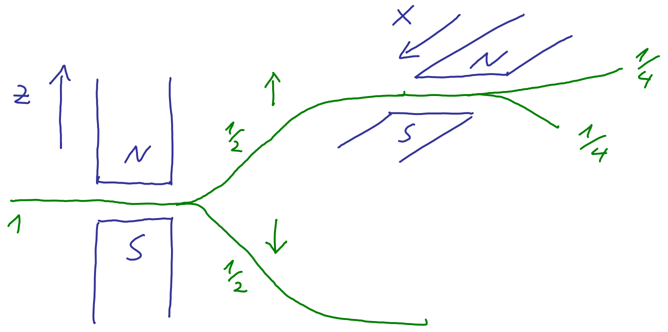
(ii)





; und analog bzgl. <u>jeder</u> anderen Ausrichtung des SG-Magneten.

(iii)



!

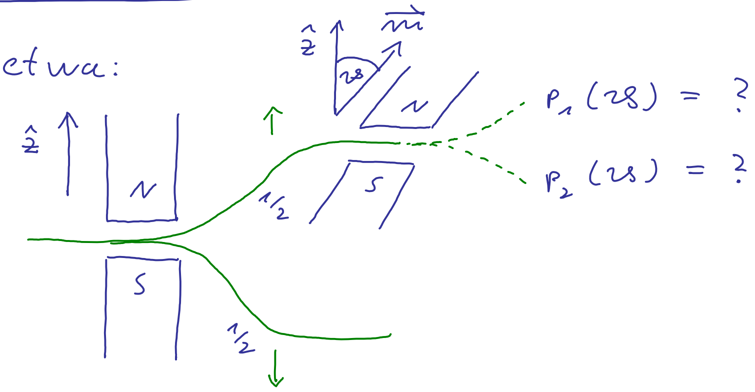
zusammenfassend:

- Messungen bzgl. bel. Achse $\vec{m}$ ergeben immer $\vec{\mu}\cdot\vec{m} = \pm \mu_0$
- Messungen bzgl. gleicher Achse reproduzierbar
- Messungen bzgl. unterschiedlicher Achsen stören einander in indeterministischer Weise

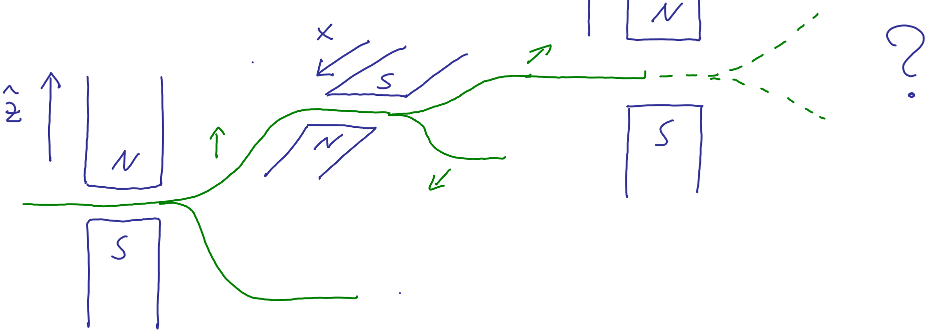
> Wie können wir die Phänomene dieser bzw. weiterer* SG-Experiment quantitativ beschreiben bzw. vorhersagen?

* etwa:

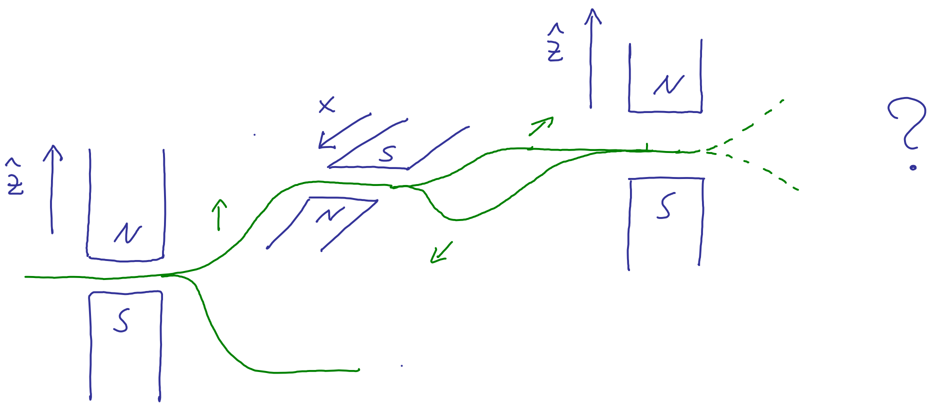
a)



b)



1)



Quantenmechanik des SG-Experiments

Postulate:

(P1) Zustandsraum $\hat{=}$ zweidimensionaler komplexer Vektorraum $\mathcal{H}$ ($\hat{=} \mathbb{C}^2$) mit hermiteschem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ (d.h. $\mathcal{H}$ Hilbertraum)

Zustand eines Ag-Atoms $\hat{=}$ normierter Vektor $\psi \in \mathcal{H}$

(P2) Zustandsmessung und -präparation:

Messung M prüfe das Vorliegen von Zustand φ_M.
Befindet sich Atom im Zustand ψ, dann M mit Wahrscheinlichkeit

$$p = |\langle \varphi_M, \psi \rangle|^2$$

positiv.
Nach Messung mit positivem Ausgang ist Atom im Zustand φ_M.

(P3) Dynamik ($\equiv$ zeitliche Entwicklung der Zustände): später!

Erläuterungen:

zu (P1): für $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$, $a \in \mathbb{C}$ sind
<u>Skalarmultiplikation</u>

$$a, \psi \longmapsto a\psi \in \mathcal{H}$$

und <u>Addition</u>

$$\psi, \varphi \longmapsto \psi + \varphi \in \mathcal{H}$$

mit den üblichen Eigenschaften gegeben; dazu

<u>hermitesches Skalarprodukt</u>

$$\psi, \varphi \longmapsto \langle \psi, \varphi \rangle \in \mathbb{C}$$

mit Eigenschaften

1) $\langle \psi, a\varphi \rangle = a \langle \psi, \varphi \rangle$

$\langle \psi, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle \psi, \varphi_1 \rangle + \langle \psi, \varphi_2 \rangle$

(Linearität)

2) $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle^*$ (Symmetrie)

3) $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$ (Positivität)

$\langle \psi, \psi \rangle = 0 \iff \psi = \underline{0}$

<u>beachte</u>:

- aus 1) folgt mit 2): $\langle a\psi, \varphi \rangle = a^* \langle \psi, \varphi \rangle$,
  $\langle \psi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$
  (Übung)

- Vektorraum + Skalarprodukt = "<u>Geometrie</u>":
  - „ψ orthogonal φ" $:\iff \langle \psi, \varphi \rangle = 0$,
  - „ψ parallel φ" $:\iff \psi = a\varphi$ für ein $a \in \mathbb{C}$,
  - Norm / Betrag / Länge von ψ: $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$, etc.

etwa: $\mathcal{H}$ zweidimensional

$\rightarrow$ es gibt <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$:

- $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1$, $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 1$, $\underbrace{\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0}$

  (kurz: $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$) d.h. genau $\varphi_1 \perp \varphi_2$

- $\psi \in \mathcal{H}$ darstellbar als $\psi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2$

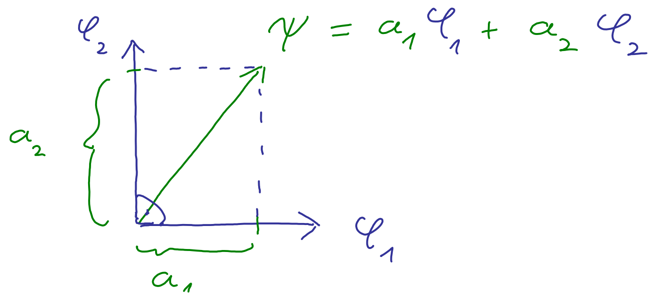
  (kurz: $\psi = \sum_i a_i \varphi_i$)

offenbar gilt: $\langle \varphi_1, \psi \rangle = a_1$

$\langle \varphi_2, \psi \rangle = a_2$ (Übung)

(kurz: $\langle \varphi_i, \psi \rangle = a_i$)

$\rightarrow$ geometrische Vorstellung:



<u>Vorsicht</u>: $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, "komplexe" Geometrie

<u>Dirac-Notation</u> (weit verbreitet):

$\mathcal{H} \ni \psi \longrightarrow |\psi\rangle$ "ket"

$\mathcal{H}^* \ni \varphi^* \longrightarrow \langle \varphi|$ "bra"

$\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi^* \psi = \langle \varphi | \psi \rangle$ "bracket"

Def. vom φ^*

Beschreibung des SG-Experiments