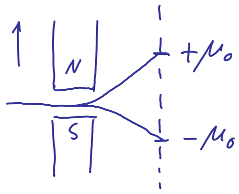
Beispiel: Observablen im SG-Experiment

a) μ_z : z-Komponente des mag. Dipolmoments eines Ag-Atoms,



zwei mögliche Messwerte: $+\mu_0$, $-\mu_0$

entsprechend orthog. Zust.: $|\psi_+\rangle$, $|\psi_-\rangle$

$\hat{=}$ herm. Operator $\hat{\mu}_z := \mu_0 |\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \mu_0 |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$

[beachte
$$\hat{\mu}_z |\psi_+\rangle = \mu_0 |\psi_+\rangle$$
$$\hat{\mu}_z |\psi_-\rangle = -\mu_0 |\psi_-\rangle$$

Eigen**zust.**

Eigen**wert**]

$\rightarrow$ Erwartungswert von μ_z im Zust. $|\psi\rangle$:

$$\langle \mu_z \rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{\mu}_z|\psi\rangle = \mu_0 |\langle\psi_+|\psi\rangle|^2 - \mu_0 |\langle\psi_-|\psi\rangle|^2 \quad \checkmark$$

analog:
$$\hat{\mu}_x = \mu_0 |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| - \mu_0 |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$$
$$\hat{\mu}_z = \mu_0 |\chi_+\rangle\langle\chi_+| - \mu_0 |\chi_-\rangle\langle\chi_-|$$

b) $\underbrace{|\vec{\mu}|^2}_{= \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2}$: Betragsquadrat des mag. Dipolmoments:

$$\hat{=} \quad \hat{A} := \underbrace{\hat{\mu}_x^2}_{= \hat{\mu}_x \cdot \hat{\mu}_x} + \hat{\mu}_y^2 + \hat{\mu}_z^2$$

$\rightarrow$ mögl. Messwerte = Eigenwerte ?

Eigenzustände ?

q.-m. Erwartungswert ?

klassische Erwartung ?

} Aufgabe 12

mittels Begriff der Observablen verallgemeinern wir bisherige Postulate :

(P1) <u>Zustandsraum</u> $\hat{=}$ komplexer VR $\mathcal{H}$ mit hermiteschem Skalarprod. $\langle\,,\rangle$

<u>Zustand</u> $\hat{=}$ normierter Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

(P2) <u>Messung und Zustandspräparation</u>

<u>Observable A</u> $\hat{=}$ <u>herm. Operator $\hat{A}$</u> :

<u>Eigenwerte</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $\hat{=}$ <u>mögliche Messwerte</u>

Eigenzustände $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \ldots, |\varphi_n\rangle$

Messung von A an System im Zust. $|\psi\rangle$ ergibt mit Wkt. $p_i = |\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$ Messwert a_i (Bornsche Regel).

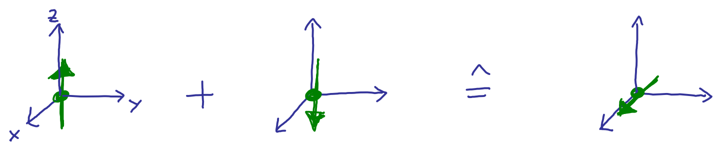
$\rightarrow$ <u>Erwartungswert</u> $\langle A\rangle_{|\psi\rangle} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Es gibt ein <u>ideales Messgerät</u> für A derart, dass <u>nach</u> Messung von a_i System im Zustand $|\varphi_i\rangle$ (ideale Messung).

Bemerkungen:

- Superpositionsfähigkeit der Zustände (mikroskopischer Systeme) erfordert Zustandsbeschreibung durch Vektoren

⌈ etwa:



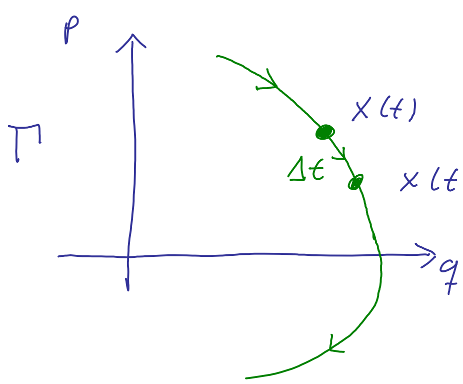
$$\hat{=} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\right) = |\varphi_+\rangle$$

- Postulate keinesfalls logische Folgerung experimenteller Daten, aber durch sehr große Anzahl positiver experimenteller Ergebnisse empirisch sehr gut bestätigt!

benötigen noch Postulat (P3) zur quantenmechanischen Dynamik:

$$\boxed{\text{Wie verändert sich ein q.m. Zustand mit der Zeit:} \quad |\psi(t)\rangle = ?}$$

Erinnerung: klassische Mechanik nach Hamilton,



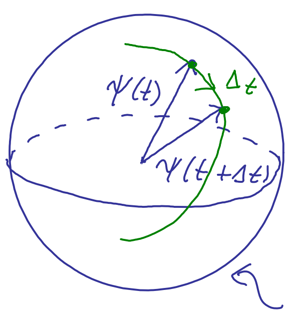
$X = (q, p)$

$$x(t+\Delta t) = X(t) + V_H(X(t))\,\Delta t$$

Hamilt. Vf $\quad V_H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$

d. h. $\quad \boxed{\frac{d X(t)}{dt} = V_H(X(t))} \quad \leftarrow$ Zustandsentwicklungsgleichung, „Dynamik"

hier:



$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = ?$$

$\leftarrow$ $(2d-1)$-Sphäre der Zustandsvektoren im $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$