$\rightarrow$ Zustandsentwicklungsgleichung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \overset{!}{=} f(|\psi(t)\rangle)} \qquad (1)$$

mit geeigneter Abb. $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$\rightarrow \quad |\psi(t+\Delta t)\rangle = |\psi(t)\rangle + f(|\psi(t)\rangle)\cdot\Delta t$$

Anforderungen an (1) und damit an f:

(i) Normerhaltung: für alle t gelte $\|\psi(t)\| = 1$!

(ii) Linearität: mit $|\psi_1(t)\rangle$ und $|\psi_2(t)\rangle$

sei auch $|\psi(t)\rangle = \alpha|\psi_1(t)\rangle + \beta|\psi_2(t)\rangle$

Lösung von (1), wobei α, β konstant (!?)

(ii) $\rightarrow$ f ist lineare Abb.: $f \equiv \hat{F}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

d.h. $|\dot{\psi}(t)\rangle = \hat{F}|\psi(t)\rangle$

damit folgt aus (i):

$$0 = \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}\langle\psi,\psi\rangle = \langle\dot{\psi},\psi\rangle + \langle\psi,\dot{\psi}\rangle$$

$$= \langle\hat{F}\psi,\psi\rangle + \langle\psi,\hat{F}\psi\rangle = \langle\psi,\hat{F}^+\psi\rangle + \langle\psi,\hat{F}\psi\rangle$$

$$= \langle\psi,(\hat{F}^+ + \hat{F})\psi\rangle \quad ; \text{ für bel } \psi$$

$\rightarrow$ $\underset{(2)}{\hat{F}^+ = -\hat{F}}$, d.h. $\hat{F}$ ist anti-hermitesch !

zweckmäßig: setze $\hat{F} \equiv -i\hat{H}$, dann $\hat{F}^+ = i\hat{H}^+$

und somit nach (2) $\hat{H} = \hat{H}^+$, d.h. $\hat{H}$ hermitesch hiermit lautet (1):

$$\boxed{\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\hat{H}|\psi(t)\rangle} \quad (1')$$

$\hat{H}$ hermitesch und damit zugleich Observable!

Welche?

studiere <u>Erhaltungsgrößen</u> unter Dynamik (1')!

<u>Def</u>: Observable A ist <u>Erhaltungsgröße</u> wenn für alle Lösungen $|\psi(t)\rangle$ von (1') $\langle A\rangle_{|\psi(t)\rangle}$ zeitlich konstant.

⌈ der Erwartungswert einer Erhaltungsgröße ist unabhängig vom Zeitpunkt der Messung. ⌋

<u>ist</u> $\hat{A}$ Erhaltungsgröße unter (1'), so gilt für beliebige Lösung $\psi(t)$ von (1'):

$$0 = \frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} = \frac{d}{dt}\langle\psi, \hat{A}\psi\rangle = \langle\dot{\psi}, \hat{A}\psi\rangle + \langle\psi, \hat{A}\dot{\psi}\rangle$$

$$= \langle -i\hat{H}\psi, \hat{A}\psi\rangle + \langle\psi, \hat{A}(-i\hat{H})\psi\rangle$$

$$= i\langle\psi, \hat{H}\hat{A}\psi\rangle - i\langle\psi, \hat{A}\hat{H}\psi\rangle = i\langle\psi, (\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H})|\psi\rangle$$

für alle Lösungen $\psi(t)$ kann dies nur erfüllt sein wenn $\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H} = 0$! Ebenso gezeigt: $\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H} = 0 \Rightarrow \langle\hat{A}\rangle_{\psi(t)} = \text{konst.}$

Somit gilt:

$$\boxed{\hat{A} \text{ Erhaltungsgröße} \iff \hat{H}\hat{A} = \hat{A}\hat{H}, \quad \text{"}\hat{H} \text{ vertauscht mit } \hat{A}\text{"}}$$

$\hat{H}$ vertauscht trivialerweise mit sich selbst!

→ **In jedem System ist der herm. Operator $\hat{H}$ der q.m. Dynamik, $|\dot{\psi}\rangle = -i\hat{H}|\psi\rangle$, zugleich Erhaltungsgröße des Systems.**

Vergleich mit (Hamiltonscher) Mechanik motiviert demnach folgende Definition:

Der herm. Op. $\hat{H}$ der q.m. Dynamik <u>ist</u> die Energie-Observable des Systems, bis auf einen konstanten Faktor der Dimension Energie x Zeit = Wirkung

numerische Übereinstimmung von „klassischer" und „quantenmechanischer" Energie wird erreicht durch Faktor $= \hbar = h/2\pi = 1{,}04 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$; alles in allem führt dies mit nunmehr „echtem" <u>Energie-Op $\hat{H}$</u> auf

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle}$$

<u>Schrödinger-Gleichung</u>

wir postulieren deshalb:

(P3) <u>Dynamik</u>: die Zeitentwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$ genügt der <u>Schrödinger-Gleichung</u>:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \,,$$

hierbei ist $\hat{H}$ der Energie- oder <u>Hamilton-Operator</u> des Systems.