Eigenenergie, Energieeigenzustand, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, Zeitentwicklungsoperator

Eigenwerte $E_1, E_2, E_3, \dots$ $\equiv$ Eigenenergieen

u. Eigenzustände $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle \dots$ $\equiv$ Energieeigenzustände

des Hamilton-Operators $\hat{H}$ erfüllen (wie immer)

Eigenwert-Gleichung $\equiv$ zeitunabhänige Schrödinger-Gleichung

$$E_n |\varphi_n\rangle = \hat{H} |\varphi_n\rangle$$

Bestimmung der Zeitentwicklung einfach in Energiebasis $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \dots$:

beliebiger Anfangszustand

$$\boxed{|\psi(0)\rangle = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle}$$

entwickelt sich gemäß

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n \, e^{-iE_n t/\hbar} \, |\varphi_n\rangle}$$

(gezeigt in Aufgabe 15)

insbesondere für $|\psi(0)\rangle = |\varphi_\ell\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_\ell t/\hbar} |\varphi_\ell\rangle \;\hat{=}\; |\varphi_\ell\rangle$$

d.h. die Energieeigenzustände sind stationär!

(Superpositionen von Energieeigenzustände dagegen nicht!)

Zeitentwicklungsoperator

$$\boxed{\hat{U}(t) := \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \, |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}$$

liefert für bel. Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$ den zeitentwickelten Zustand $|\psi(t)\rangle$ durch

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle}$$

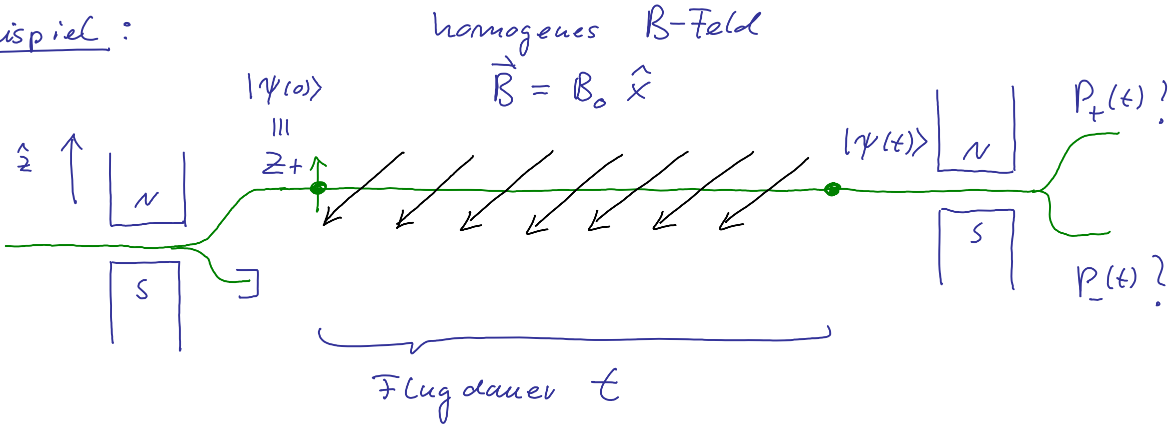
(gezeigt in Aufgabe 15)

allg. Eigenschaften:

$$\boxed{\begin{aligned} &\hat{U}(0) = \mathbb{1}, \\ &\hat{U}(t_1)\,\hat{U}(t_2) = \hat{U}(t_1+t_2), \\ &\hat{U}^{-1}(t) = \hat{U}(-t) = \hat{U}^{+}(t), \\ &\hat{U}^{+}(t)\,U(t) = \mathbb{1} \end{aligned}}$$

(gezeigt in Aufgabe 15)

Beispiel:



Energie eines mag. Dipols $\vec{\mu}$ im homog. Feld $\vec{B} = B_0\,\hat{x}$:

$$E = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu_x B_0$$

$\longrightarrow$

Hamilton-Operator

$$\hat{H} \overset{!}{=} -B_0 \hat{\mu}_x = B_0 \mu_0 |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-| - B_0 \mu_0 |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+|$$

$\rightarrow$ Eigenenergieen: $\quad -B_0\mu_0 \quad , \quad +B_0\mu_0$

Energieeigenzust.: $\quad |\varphi_+\rangle \quad , \quad |\varphi_-\rangle$

$\rightarrow$ Zeitentwicklungsoperator:

$$\hat{U}(t) = e^{-iB_0\mu_0 t/\hbar} |\varphi_-\rangle\langle\varphi_-| + e^{iB_0\mu_0 t/\hbar} |\varphi_+\rangle\langle\varphi_+|$$

Anfangszustand:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle\right)$$

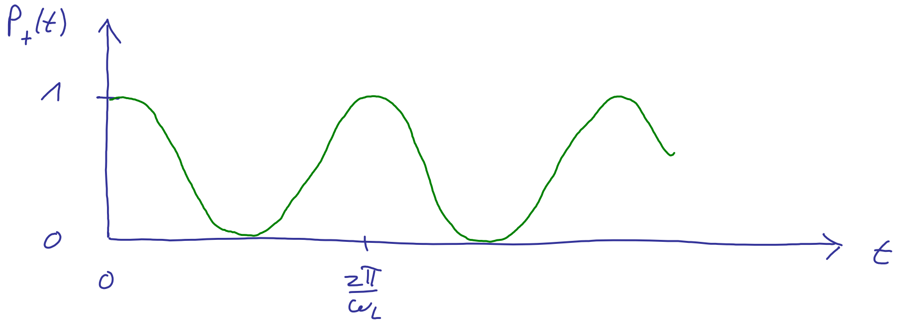
ergibt:

$$P_+(t) \equiv |\langle\psi_+|\psi(t)\rangle|^2 = |\langle\psi_+|U(t)|\psi_+\rangle|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left| e^{-iB_0\mu_0 t/\hbar} + e^{+iB_0\mu_0 t/\hbar} \right|^2$$

$$\underset{e^{-ix}+e^{ix} = 2\cos x}{=} \cos^2\left(\frac{B_0\mu_0}{\hbar} t\right) \; ;$$

mit Larmor-Frequenz $\quad \omega_L := \frac{B_0\mu_0}{\hbar} \quad$ also $\quad \boxed{P_+(t) = \cos^2\omega_L t}$



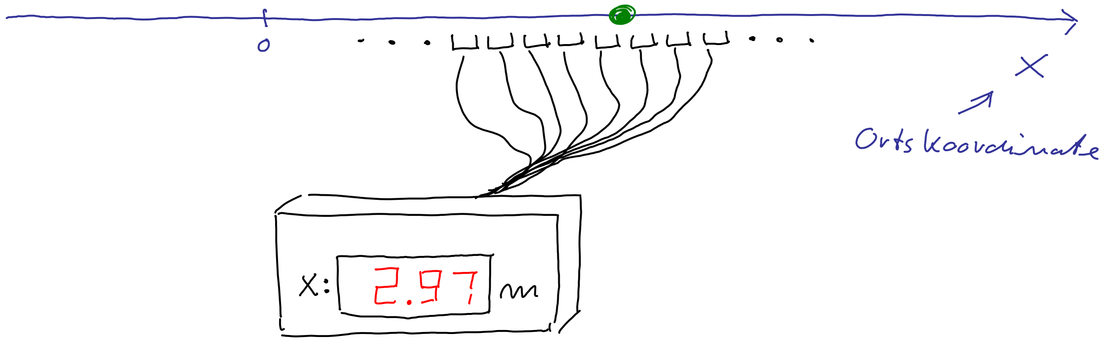
- $P_-(t) = 1 - P_+(t) = \sin^2\omega_L t$
- $\mu_0 \equiv \mu_B = 9{,}2 \cdot 10^{-24}\, J/T$; für $B_0 = B_{EM} \approx 5 \cdot 10^{-5}\, T$ folgt

$$\omega_L \approx 4{,}5 \text{ MHz} \; .$$

Quantenmechanik eines Punktteilchens

⌈ etwa zwecks q.m. Beschreibung des H-Atoms. ⌋

statt Teilchen im dreidimensionalen Raum erst Teilchen auf eindimensionaler Geraden:



Ortsmessgerät, ermittelt Ort $x \in \mathbb{R}$ des Teilchens,

entsprechender Ortseigenzustand sei $|x\rangle$;

da "Teilchen gemessen am Ort x_1" und
" " " " x_2"

einander ausschließend, sind $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$ orthogonal (solange $x_1 \neq x_2$)!

$$\langle x | x' \rangle = \delta_{x,x'}$$

$\rightarrow$ $\mathcal{B} = \{ |x\rangle \mid x \in \mathbb{R} \}$ ist ein Orthonormalsystem

im Zustandsraum $\mathcal{H}$ des Teilchens; annehmend, dass $\mathcal{B}$ auch vollständig, behaupten wir, dass bel. Zustand $|\psi\rangle$ des Teilchens in $\mathcal{B}$ dargestellt werden kann:

(1) $$\boxed{|\psi\rangle = \sum_{x \in \mathbb{R}}^{(*)} \psi(x)\, |x\rangle}$$

⌈ analog $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |\varphi_n\rangle$ ⌋

⌈ (*) hier und folgend meint „$\sum_{x \in \mathbb{R}} \dots$" eigentlich „$\int_{\mathbb{R}} dx \dots$", s.u. ⌋

d.h. $\underset{\mathbb{C}\ni}{\psi(x_0)} = \langle x_0 | \psi \rangle$ [analog $\underset{\mathbb{C}\ni}{\psi_\ell} = \langle \varphi_\ell | \psi \rangle$]

$\psi(x) \equiv$ "Wellenfunktion des Teilchens im Zustand $|\psi\rangle$ am Ort x"

ein weiterer Zustand sei $|\varphi\rangle = \sum_{x \in \mathbb{R}} \varphi(x) |x\rangle$,

→ • <u>Skalarprodukt</u>: $\langle \varphi | \psi \rangle = \sum_{x \in \mathbb{R}} \varphi^*(x) \psi(x)$

• <u>Normierung</u>: $\| |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = \sum_x |\psi(x)|^2 \overset{!}{=} 1$

• Wkt., dass Ortsmessung an Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$ einen Messwert $x \in [a,b]$ ergibt:

$$P_{[a,b]} \overset{(P2)}{=} \sum_{x \in [a,b]} |\langle x | \psi \rangle|^2 = \sum_{x \in [a,b]} |\psi(x)|^2$$

• Operator der Observable Ort:

$$\hat{X} = \sum_{x \in \mathbb{R}} x |x\rangle\langle x|$$

[analog: $\hat{A} = \sum_n a_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$]

$$\boxed{\text{Da } x \text{ in } \text{„}\sum_{x\in\mathbb{R}} \dots\text{" \underline{kontinuierlich}, wird Notation etwas modifiziert: } \text{„}\sum_{x\in\mathbb{R}} \dots\text{"} \longrightarrow \text{„}\int_{-\infty}^{\infty} dx \dots\text{"}}$$

→
$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi(x) |x\rangle,$$

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x)|^2,$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \varphi^*(x) \psi(x)$$

$$P_{[a,b]} = \int_a^b dx \; |\psi(x)|^2 \quad ,$$

<u>Normierung</u> der Zustände $|x\rangle$ derart, dass

$$\mathbb{1} \stackrel{!}{=} \int dx \; |x\rangle\langle x| \quad ,$$

bedingt, dass

$$\langle x' | x \rangle \stackrel{!}{=} \delta(x'-x)$$

Dirac-Delta-Funktion / Distribution