Quantenmechanischer Impuls eines Punktteilchens

Hamiltonsche Mechanik:

- Hamilton-Funktion generiert Zeitentwicklung
- Impuls generiert Translation
- Drehimpuls generiert Rotation

$\longrightarrow$ - Energieerhaltung

- Impulserhaltung bei Translationssymmetrie !
- Drehimpulserhaltung bei Rotationssymmetrie !

QM: Hamilton-Operator $\hat{H}$ generiert Zeitentwicklung:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \stackrel{!}{=} -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

oder äquivalent: $\hat{U}(\delta t) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\,\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$,

d.h. $$\boxed{\hat{H} = i\hbar \frac{d}{dt}\hat{U}(t)\Big|_{t=0}}$$

analog definieren wir:

Der <u>Impuls-Operator</u> $\hat{p}$ generiert die <u>Translation</u> $\hat{T}(a)$, d.h. genau

$$\boxed{\hat{p} := i\hbar \frac{d}{da} \hat{T}(a)\Big|_{a=0}} \,,$$

wobei $\hat{T}(a)$ gegeben durch

$$\boxed{\hat{T}(a)\,|x\rangle = |x+a\rangle} \,. \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Normerhaltung der Translation impliziert Hermitizität: $\hat{p} = \hat{p}^{\dagger}$

Ferner:

$$\hat{p}\,|\psi\rangle \overset{\text{Def.}}{=} i\hbar \frac{d}{da}\left(\hat{T}(a) \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle\right)_{a=0}$$

$$= i\hbar \frac{d}{da}\left(\int dx\, \psi(x)\, |x+a\rangle\right)_{a=0} = i\hbar \frac{d}{da} \int d\tilde{x}\, \psi(\tilde{x}-a)\, |\tilde{x}\rangle \Big|_{a=0}$$

$$= \int dx\, \underbrace{\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)}\, |x\rangle$$

= Wellenfunktion des Zustands $\hat{p}\,|\psi\rangle$!

$\rightarrow$ Wirkung des Impuls-Operators auf Wellenfunktion:

$$\psi(x) \xrightarrow{\ \hat{p}\ } -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

<u>kurz</u>: $\boxed{\hat{p} \,\hat{=}\, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}}$

Impulseigenzustände

$|\varphi_p\rangle$ sei Eigenzustand von $\hat{p}$ zum Eigenwert p,

d.h. $$\hat{p}\,|\varphi_p\rangle \overset{!}{=} p\,|\varphi_p\rangle$$

$\rightarrow$ $$\langle x|\hat{p}|\varphi_p\rangle = p\,\langle x|\varphi_p\rangle$$

$\rightarrow$ $$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_p(x) \overset{!}{=} i\frac{p}{\hbar}\,\varphi_p(x)$$

und damit $$\varphi_p(x) = c\, e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

$\uparrow$ Konstante (oBdA: $c=1$)

$\rightarrow$ Impulseigenfunktion $\varphi_p(x) \equiv \langle x|\varphi_p\rangle$ ist (ebene) Welle e^{ikx} mit Wellenzahl $k = p/\hbar$.