PD. Dr. R. Klesse
S. Bittihn, C. von Krüchten Sommersemester 2017

Theoretische Physik in 2 Semestern II
Nachklausur

www.thp.uni-koeln.de/∼rk/tpII_17.html/

Informationen zur Klausur:

- Die Klausur dauert 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus acht Aufgaben mit insgesamt 61 Punkten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem **eigenen** Blatt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben sind keine Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner) erlaubt.
- Geben Sie bitte auf **jedem** Blatt ihren Namen an.
- Denken Sie bitte daran, das Deckblatt auszufüllen, dort zu **unterschreiben** und die Aufgaben anzukreuzen, die von Ihnen bearbeitet wurden.
- Bitte **unterschreiben** Sie auch am Ende Ihrer abzugebenen Lösungszettel!

1. Kurzfragen *2+2+2+2+2 = 10 Punkte*

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils in einem kurzen Satz und/oder maximal zwei Formeln:

a) Was bedeutet die Orthogonalität zweier Zustände φ und ψ eines quantenmechanischen Systems physikalisch und mathematisch?

b) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung eines allgemeinen quantenmechanischen Systems mit Hamilton-Operator $\hat{H}$?

c) $\hat{A}$ sei der hermitesche Operator einer Observablen eines Systems mit Hamilton-Operator $\hat{H}$. Was bedeutet das Verschwinden des Kommutators $[\hat{H}, \hat{A}]$ physikalisch?

d) Wie ist Wärme in der Statistischen Physik definiert?

e) $A \subset \Gamma$ sei ein Makrozustand eines Systems mit diskreten Phasenraum Γ. Wie groß ist nach Boltzmann seine Entropie?

2. Stern-Gerlach-Experiment *4 Punkte*

Ein Strahl $x+$ polarisierter Silberatome wird durch einen in z-Richtung ausgerichteten Stern-Gerlach-Magneten in zwei Teilstrahlen mit positiver und negativer z Polarisation aufgespalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde an einem Atom in dem $z-$ polarisierten Teilstrahl $x+$ Polarisation gemessen werden?

3. Dreizustandssystem I *6 Punkte*

Gegeben sei ein Dreizustandssystem mit den Eigenenergien $E_0 = -\varepsilon$, $E_1 = 0$ und $E_2 = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) zu den orthogonalen Energieeigenzuständen $|\varphi_0\rangle$, $|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im Zustand

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle \right).$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das System nach der Zeit $t > 0$ im Zustand

(i) $|\chi\rangle$,

(ii) $|\varphi_0\rangle$ und

(iii) $|\varphi_1\rangle$

vorliegt.

4. Harmonischer Oszillator *3+2+3+2 = 10 Punkte*

Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Frequenz ω. Die Auf- und Absteigeoperatoren sind durch

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{l} + \mathrm{i}\frac{l}{\hbar}\hat{p} \right)$$
$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{x}}{l} - \mathrm{i}\frac{l}{\hbar}\hat{p} \right)$$

gegeben, wobei $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Die Wellenfunktion des Grundzustandes lautet bekanntlich

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(\pi l^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2} \right).$$

a) Zeigen Sie, dass φ_0 tatsächlich der Grundzustand ist, indem Sie zeigen, dass $b|\varphi_0\rangle = 0$.

b) Bestimmen Sie $[b, b^\dagger]$. Sie dürfen voraussetzen, dass $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

c) Berechnen Sie $\langle x^2 \rangle$ im Grundzustand.

d) Was ist die physikalische Bedeutung von $b^\dagger|\varphi_0\rangle$ (in Worten, keine Berechnung)?

5. Endliche Potentialstufe *7+3 = 10 Punkte*

Ein Teilchen der Energie E treffe von $-\infty$ kommend auf eine Potentialstufe, welche durch

$$V(x) = \begin{cases} W, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Es gelte $E > W > 0$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Teilchen an der Potentialstufe reflektiert?

b) Skizzieren Sie diese Wahrscheinlichkeit als Funktion der Energie $E > W$ mit $W = 1$.

6. Dreizustandssystem II

5+2 = 7 Punkte

Ein System kann drei Zustände x_0, x_1 und x_2 einnehmen. Die entsprechenden Systemenergien seien $E_0 = -\varepsilon$, $E_1 = 0$ und $E_2 = \varepsilon$, wobei $\varepsilon > 0$. Das System befinde sich im Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T.

a) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten nimmt das System die Zustände x_0, x_1 und x_2 an? Wie lauten diese für $T = 0$ und $T = \infty$?

b) Wie groß ist die mittlere Energie des Systems?

7. Isobare Abkühlung eines idealen Gases

2+2+2+2 = 8 Punkte

Ein ideales Gas in einem variablen Volumen V kühlt sich bei konstantem Druck $p = 1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$ von Temperatur $T_0 = 900\,\mathrm{K}$ auf $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ ab. Das Anfangsvolumen sei $V_0 = 1\,\mathrm{m}^3$.

a) Leiten Sie aus der mikrokanonischen Entropie

$$S(E, V) = Nk_B \ln(E^{3/2}V),$$

eines idealen Gases die Zustandsgleichungen

$$E = \frac{3}{2}Nk_BT\,, \qquad pV = Nk_BT$$

ab.

b) Welches Volumen nimmt das Gas nach der Abkühlung ein?

c) Welche Arbeit wird während der Abkühlung am Gas verrichtet?

d) Welche Wärme wird dabei an die Umgegebung abgegeben?

8. Zweidimensionales Gas

6 Punkte

Die Leitungselektronen in einer sehr, sehr dünnen Schicht Graphit bilden in guter Näherung ein ideales Gas in zwei Raumdimensionen. Die Energie E eines Leitungselektrons mit zweidimensionalen Impuls $\vec{p} = (p_1, p_2)$ ist durch

$$E = v_0|\vec{p}|$$

gegeben, wobei $v_o > 0$ ein Materialparameter ist. Bestimmen Sie die mittlere Energie eines Teilchens dieses Gases in Abhängigkeit von der Gastemperatur.