PD. Dr. R. Klesse
S. Bittihn, C. von Krüchten Sommersemester 2017

Theoretische Physik in 2 Semestern II
Nachklausur

www.thp.uni-koeln.de/∼rk/tpII_17.html/

Informationen zur Klausur:

- Die Klausur dauert 120 Minuten.
- Die Klausur besteht aus acht Aufgaben mit insgesamt 61 Punkten. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem **eigenen** Blatt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben sind keine Hilfsmittel (z.B. Taschenrechner) erlaubt.
- Geben Sie bitte auf **jedem** Blatt ihren Namen an.
- Denken Sie bitte daran, das Deckblatt auszufüllen, dort zu **unterschreiben** und die Aufgaben anzukreuzen, die von Ihnen bearbeitet wurden.
- Bitte **unterschreiben** Sie auch am Ende Ihrer abzugebenen Lösungszettel!

1. Kurzfragen *2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils in einem kurzen Satz und/oder maximal zwei Formeln:

a) Welche Bedeutung hat der Hamilton-Operator in der Quantenmechanik?

b) Wann ist ein Operator hermitesch?

c) $|\varphi\rangle$ sei ein normierter Eigenvektor des Operators $\hat{A}$ zum Eigenwert a. Bestimmen Sie $\langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$.

d) Wie ist die freie Energie eines Systems definiert?

e) Was besagt das Prinzip der minimalen freien Energie?

f) Wie bestimmt man Druck und Temperatur anhand der mikrokanonischen Entropie $S(E, V, N)$?

2. Erhaltungsgrößen *2+3 = 5 Punkte*

Ein quantenmechanisches System werde durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = iE\left(|\psi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\psi|\right)$$

beschrieben, wobei $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ zwei orthonormale Zustände des Systems seien. E sei eine reelle Größe der Dimension Energie.

a) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ hermitesch ist.

b) Welche der folgenden Observablen sind Erhaltungsgrößen des Systems?

$$\hat{A}_1 = a|\varphi\rangle\langle\varphi|, \quad \hat{A}_2 = ia\left(|\varphi\rangle\langle\psi| - |\psi\rangle\langle\varphi|\right), \quad \hat{A}_3 = a\left(|\psi\rangle\langle\varphi| + |\varphi\rangle\langle\psi|\right)$$

a sei eine reelle Konstante.

3. Stern-Gerlach-Experiment *2+4 = 6 Punkte*

Im Rahmen eines Stern-Gerlach Experimentes sei der Anfangszustand der Silberatome durch

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_-\rangle$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $|\psi_+\rangle$ bzw. $|\psi_-\rangle$ den Zustand $z+$ bzw. $z-$ polarisierter Atome.

a) Die Silberatome werden nun durch einen in z-Richtung ausgerichteten Stern-Gerlach-Magneten geschickt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom des Strahls danach $z+$ bzw. $z-$ polarisiert ist?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine $x+$ bzw. $x-$ Polarisation eines Atoms, wenn der Strahl stattdessen durch einen in x-Richtung ausgerichteten Stern-Gerlach-Magneten geführt wird?

4. Harmonischer Oszillator *8 Punkte*

Betrachten Sie einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator der Frequenz ω. Der Zustand χ sei die Superposition des Grundzustands $|\varphi_0\rangle$ und des zweiten angeregten Zustands $|\varphi_2\rangle$,

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_0\rangle + |\varphi_2\rangle\right).$$

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Oszillator im Zustand χ.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(t)$ befindet sich der Oszillator zur Zeit $t > 0$ wieder im Anfangszustand?
Bestimmen Sie explizit diese Wahrscheinlichkeit für die Zeiten $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$, $t_2 = \frac{\pi}{\omega}$, $t_3 = \frac{3\pi}{2\omega}$.

5. Teilchen im Potentialtopf *7 Punkte*

Betrachten Sie ein Teilchen, das sich in einem eindimensionalen, unendlich hohen Kastenpotential der Länge l befindet. Berechnen Sie für dieses Teilchen die Eigenenergien des Grundzustands, sowie des ersten und zweiten angeregten Zustands.

6. Ideales Gas *8 Punkte*

Wir betrachten ein ideales Gas bestehend aus N Teilchen in einem Behälter mit variablem Volumen V. Zeigen Sie, dass das Gas den Zustandsgleichungen

$$E = \frac{3}{2}k_B T\,, \qquad pV = Nk_B T$$

genügt.

7. Kanonisches Ensemble

4+3+2 = 9 Punkte

Ein quantenmechanisches System mit Eigenzuständen $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, \ldots$ bei Energien $E_0 = 0, E_1 = \epsilon, E_2 = 2\epsilon, E_3 = 3\epsilon, \ldots$ befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht mit einem Bad der Temperatur T.

a) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme des Systems durch

$$Z(\beta) = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon}}$$

gegeben ist. Hierbei ist $\beta = 1/k_B T$ die inverse Temperatur.

b) Bestimmen Sie die mittlere Energie des Systems bei Temperatur T.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System bei Temperatur T im Zustand $|\varphi_n\rangle$?

8. Entropie

3+3 = 6 Punkte

Ein ca. $3\,g$ schwerer Holzwürfel wird aus $1\,m$ Höhe auf eine Glasplatte fallen gelassen. Nach sehr kurzer Zeit kommt der Würfel dort zum Liegen. Die mechanische Energie des Würfels wurde also vollständig in Wärme umgewandelt und der Würfel weist jetzt eine gegenüber Raumtemperatur geringfügig erhöhte Temperatur auf.

a) Um welchen Betrag hat sich durch diese Erwärmung die Entropie des Würfels erhöht?

b) Schätzen Sie grob die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass der auf der Glasplatte ruhende Würfel spontan seine Temperatur geringfügig erniedrigt und auf $1m$ Höhe springt. [$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23}\,J/K$].

<u>Eventuell hilfreiche Formeln</u>

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$
- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$