Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Ernst, A. Wolff, T. Zell

# 1. Klausurteil zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

*Wintersemester 2009/2010*

**Hinweis:** Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel.

## 1. Kurzfragen *7*2=14 Punkte*

**a)** Durch welche mathematischen Objekte werden Zustände eines quantenmechanischen Systems beschrieben?

**b)** Was bedeutet die Orthogonalität zweier Zustände mathematisch und physikalisch?

**c)** Welche Bedeutung hat der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems?

**d)** Geben Sie ein hinreichendes und notwendigs Kriterium dafür an, dass eine Observable $A$ eines quantenmechanischen Systems eine Erhaltungsgröße ist.

**e)** Was ist der Zusammenhang zwischen dem Zustand $|\psi\rangle$ eines Teilchen und seiner Wellenfunktion $\psi(\underline{r})$ ?

**f)** Wie ist der Impuls-Operator eines Teilchen definiert? Wie lautet er in Ortsdarstellung?

**g)** Wie lautet das Ehrenfesttheorem?

## 2. Observable eines Zwei-Zustand-Systems *10 Punkte*

Wir betrachten ein (nicht näher spezifiziertes) quantenmechanisches Zwei-Zustands-System mit orthonormalen Zuständen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und entsprechenden Projektionsoperatoren $P_{\varphi_1}$ und $P_{\varphi_2}$. Eine Observable sei durch den Operator $A = a_1 P_{\varphi_1} + a_2 P_{\varphi_2}$ gegeben ($a_1$ und $a_2$ reell).

**a)** Was sind die möglichen Messwerte der Observablen $A$ und bei welchen Zuständen werden sie mit Wahrscheinlichkeit $p = 1$ gemessen?

**b)** Bestimmen Sie den Erwartungswert von $A$ bzgl. des Zustandes $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

## 3. Superposition und Gemisch im Stern-Gerlach-Exp. *10 Punkte*

Eine Quelle emittiert einen kontinuierlichen Strahl von Silberatomen. Die Quelle ist so beschaffen, dass genau folgende zwei Möglichkeiten für die quantenmechanischen Zustände der Atome im Strahl in Frage kommen:

1. Alle Atome im Strahl sind im selben Zustand $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-)$, wobei $\psi_+$ den Zustand $z+$ polarisierter, und $\psi_-$ den Zustand $z-$ polarisierter Silberatome bezeichnet.

2. 50% der Atome befinden sich im Zustand $\psi_+$, die restlichen 50% sind im Zustand $\psi_-$. Die Verteilung der Zustände $\psi_\pm$ auf die Atome ist dabei rein zufällig.

Idenitfizieren und erläutern Sie ein Experiment, mit dem Sie entscheiden können, welche der zwei Möglickeiten vorliegt.

## 4. Wellenfunktion *10 Punkte*

Der Zustand $|\psi\rangle$ eines Teilchens in einer Dimension sei durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{e^{ikx}}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-d)^2}{4\sigma^2}}$$

gegeben. Die Konstanten $\sigma$ und $d$ haben die Dimension *Länge*, $k$ die Dimension *1/Länge*.

**a)** Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Zuständs für $\sigma = 1$, $d = 3\sigma$ und $k = 1/\sigma$.

**b)** Bestimmen Sie die Erwartungswerte von Ort $x$ und Impuls $p$ bezüglich dieses Zustands.

## 5. Tunneleffekt *10 Punkte*

Die Metallspitze eines Raster-Tunnel-Mikroskops befinde sich genau im Abstand $d_0 = 2$ Å zur ebenfalls metallischen Probe. Die restlichen Parameter seien so eingestellt, dass bei diesem Abstand Elektronen mit Transmissionswahrscheinlichkeit $T_0 = 0.01$ das Vakuum zwischen Metallspitze und Probe durchtunneln. Der aus diesen Tunnelprozessen resultierende Tunnelstrom habe die Stärke $I_0 = 1\mu A$.

**a)** Wie ändert sich die Transmissionswahrscheinlichkeit, wenn der Abstand halbiert bzw. verdoppelt wird, alle anderen Parameter aber unverändert bleiben? Wie ändert sich dementsprechend der Tunnelstrom?

**b)** Ein Magier betritt das Labor und verpasst den tunnelnden Elektronen eine $10^{26}$ fach größere Masse als sie tatsächlich haben. D.h. die Elektronen hätten dann ungefähr die Masse einer kleinen Murmel. Sonst ändert sich nichts. Wie groß ist dann die Transmissionswahrkscheinlichkeit?

**c)** Nun stellen wir uns vor, dass in jeder Sekunde genau soviele dieser murmelschweren Elektronen die Gelegenheit zum Tunneln bekommen, wie es Protonen im Universum gibt, nämlich etwa $10^{80}$ (!). Unter diesen Bedingungen warten wir noch einmal solange, wie das Universum alt ist, also etwa $10^{10}$ Jahre. Wieviel "Murmeln" werden getunnelt sein? (Das Jahr hat etwa $\pi \times 10^7$ Sekunden.)

## 6. Hoch angeregtes Wasserstoffatom *10 Punkte*

Wir betrachten ein Wasserstoffatom in einem sehr hoch angeregten Zustand mit maximalem Drehimpuls, d.h. in einem Zustand mit sehr großer Hauptquantenzahl $n \gg 1$ und Drehimpulsquantenzahl $l = n - 1$. Der mittlere Abstand des Elektrons zum Proton ist in diesem Fall sehr viel größer als der Bohrsche Atomradius $a$.

**a)** Wegen des großen Abstands sollte im vorliegenden Fall auch eine klassische Beschreibung des Elektrons erlaubt sein. Berechnen Sie die Umlauffrequenz $\omega$ eines klassischen Elektrons auf einer Kreisbahn mit Drehimpuls vom Betrag $\hbar\sqrt{l(l+1)} \approx \hbar n$.

**b)** Das klassische Elektron strahlt elektromagnetische Wellen der Frequenz $\omega$ ab. Zeigen Sie, dass (in sehr guter Näherung) ein *quantenmechanisches* Elektron bei einem Übergang von $n$ nach $n - 1$ ein Photon dieser klassischen Frequenz abstrahlt!