Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

R. Klesse
M. Ernst, A. Wolff, T. Zell

2. Klausurteil zur Theoretischen Physik in zwei Semestern II

Wintersemester 2009/2010

Hinweis: Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Bitte benutzen Sie außer Stift und Papier keine weiteren Hilfsmittel.

1. Kurzfragen

$4 \times 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 13$ *Punkte*

a) Durch welche Annahme wird in der Statistischen Physik der Gleichgewichtszustand eines isolierten Systems beschrieben?

b) Wie sind Wärme und Temperatur definiert?

c) Wie lautet die Planck'sche Strahlungsformel? Wie würde die spektrale Energiedichte von der Frequenz abhängen, wenn die Welt eindimensional wäre?

d) Was versteht man unter dem Carnot-Prozess und weshalb ist er in der Thermodynamik von Bedeutung?

e) Wie lautet der erste Hauptsatz der Thermodynamik?

f) Wie lauten die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Verteilung?

g) Durch welchen Ausdruck kann $n!$ genähert werden, wenn $n \gg 1$?

h) Was versteht man unter latenter Wärme?

2. Würfeln

3 Punkte

Es wird mit einem fairen Würfel gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei sechsmal würfeln alle Zahlen von 1 bis 6 genau einmal auftreten (Reihenfolge beliebig).

3. Ultrarelativistisches ideales Gas

5+4+3=12 Punkte

Wir betrachten ein ultrarelativistisches ideales Gas, bestehend aus N Teilchen, im Volumen V. Die Teilchen bewegen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit c, so dass ihre Energie $E \gg m_0 c^2$. Unter Vernachlässigung der Ruhemasse m_0 der Teilchen lautet deren Energie-Impuls-Beziehung dann in guter Näherung

$$E = c|\mathbf{p}|. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die (mikrokanonische) Zustandssumme eines ultrarelativistischen idealen Gases mit N Teilchen im Volumen V und mit Energie E gegeben ist durch

$$Z(E) = \alpha V^N E^{3N}, \tag{2}$$

wobei α eine numerische Konstante ist.

b) Bestimmen Sie anhand der mikrokanonischen Zustandssumme aus a) die kalorische und thermische Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases.

c) Zeigen Sie, dass der Druck p des Gases mit der Energiedichte $u = E/V$ über die einfache Beziehung $p = u/3$ zusammenhängt.

4. Reversible Ausdehnung eines idealen Gases *6+6=12 Punkte*

Ein ideales Gas (N Teilchen, Volumen V_0, Temperatur T_0) werde reversibel auf das doppelte Volumen $V_1 = 2V_0$ ausgedehnt, und zwar

a) unter konstantem Druck (isobar)

b) bei konstanter Temperatur (isotherm)

Berechnen Sie jeweils die geleistete Ausdehnungsarbeit, die zuzuführende Wärmemenge sowie die Entropieänderung des Gases und skizzieren Sie jeden Prozess in einem $P - V$ und einem $T - S$ Diagramm. Wie findet man in den Diagrammen ΔQ bzw. ΔA?

5. Entropie und freie Energie eines Magneten *4+5+3=12 Punkte*

Ein magnetisches Systems bestehe aus $N \gg 1$ klassischen Spins $s_1, \ldots, s_N$ mit Werten $s_i = \pm 1$. Der Makrozustand $A(M)$ sei die Menge aller Spinzustände $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N)$ mit Magnetisierung $M = \sum_i s_i$.

a) Bestimmen Sie die Boltzmann-Entropie $S(M)$.

b) Nun werde ein äußeres Magnetfeld B angelegt, infolgedessen das System die magnetisierungsabhängige Energie $E(M) = -\mu BM$ annimmt. Bestimmen Sie die freie Energie als Funktion von M und der Temperatur T und daraus die Magnetisierung M (im Gleichgewicht) als Funktion von T.

c) Skizzieren Sie die Magnetisierung M als Funktion von B für Temperaturen T_0, T_1, T_2 mit $T_0 = 0$, und $0 < T_1 < T_2$. [Hinweis: $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \operatorname{artanh} x$]

6. 1D Ising-Modell *3+5+4=12 Punkte*

Ein einfaches Modell eines ferromagnetischen Systems ist das Ising-Modell. Wir betrachten hier eine eindimensionale Version, bestehend aus $N \gg 1$ klassischen Spins $s_1, \ldots, s_N$, die die Werte $s_i = \pm 1$ annehmen können. Die Spins sind in einer Reihe angeordnet, und je zwei benachbarte Spins s_i und s_{i+1} besitzen die Wechselwirkungsenergie $-J s_i s_{i+1}$, wobei J die Austauschenergie ist. Die Hamilton-Funktion des Ising-Modells lautet somit

$$H = -J \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} \, .$$

a) Was lässt sich über die Magnetisierung des System bei sehr tiefer bzw. sehr hoher Temperatur sagen? Begründen Sie Ihre Aussagen anhand der freien Energie des Systems.

b) Für einen gegebenen Spinzustand $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ bezeichne $n(\mathbf{s})$ die Anzahl der Fehlstellen, d.h. die Anzahl der Positionen $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ für die $s_i s_{i+1} = -1$. Wir betrachten nun Makrozustände A_α zu gegebener Fehlstellendichte $\alpha \in [0, 1]$, also $A_\alpha = \left\{ \mathbf{s} \in \{-1, 1\}^N \mid n(\mathbf{s}) = \alpha N \right\}$. Zeigen Sie, dass für große N die freie Energie F bis auf eine unbedeutende Konstante durch

$$\frac{1}{N} F = 2J\alpha - k_B T \, \mathrm{h}(\alpha)$$

gegeben ist. $\mathrm{h}(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x)$ ist wie immer die binäre Entropie.

c) Bestimmen Sie die Fehlstellendichte α (im Gleichgewicht) als Funktion der Temperatur. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit a).