Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Tim Schmitz, Christopher Max
Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
1. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 10.04.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

1. Komplexe Zahlen (3+3)

In dieser Aufgabe soll der Umgang mit komplexen Zahlen geübt werden.

a) Bestimmen Sie z^*, $|z|$, $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ für

$$z_1 = a - ib, \qquad z_2 = \tfrac{1}{ib}, \qquad z_3 = (a+ib)(a-ib),$$
$$z_4 = (a+ib)^2, \quad z_5 = \sqrt{-25}, \quad z_6 = \tfrac{1}{a+ib} \text{ mit } a \neq 0,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Es seien $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2.

2. Polardarstellung von komplexen Zahlen (3+3+2)

Jede komplexe Zahl lässt sich äquivalent auch in der sogenannten Polardarstellung als $z = r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}$ und $\phi \in [0, 2\pi]$, schreiben. Warum dies sowohl anschaulich als auch nützlich ist, wollen wir hier demonstrieren.

a) Beweisen Sie die Euler-Identität $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ für $\phi \in [0, 2\pi]$. Nützlich ist dabei die Reihendarstellung der Exponentialfunktion, bekannt aus der Vorlesung, und von Sinus und Kosinus.

b) Betrachten Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{4}}$, $z_2 = 3\,e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $z_3 = i$, $z_4 = 2$, $z_5 = -2+i$ und $z_6 = z_5^*$. Zeichnen Sie die Zahlen in der komplexen Ebene ein, sodass der Realteil der x-Koordinate und der Imaginärteil der y-Koordinate entspricht. Geben Sie die Zahlen auch in der jeweils fehlenden Darstellung an, entweder als $a + ib$ oder $r\,e^{i\phi}$.

c) Bestimmen Sie mithilfe der Polardarstellung $(1+i)^{444}$ und i^i.

3. Komplexe Darstellung von Wellen (2+2+2)

Aus dem letzten Semester ist Ihnen die Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$ (hier in einer räumlichen Dimension) bekannt.

a) Betrachten Sie die komplexwertige Funktion $\phi = e^{i(kx-\omega t)}$. Bestimmen Sie ω in Abhängigkeit von k und der Lichtgeschwindigkeit c, sodass ϕ die Wellengleichung löst.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Re}(\phi)$ und $\mathrm{Im}(\phi)$, und zeigen Sie, dass diese auch unabhängig voneinander die Wellengleichung lösen.

c) Betrachten Sie zwei Wellen $\phi_1 = e^{i(kx-\omega t)}$ und $\phi_2 = e^{i(-kx-\omega t)}$ mit gleicher Wellenzahl k, die sich in entgegengesetzte Richtungen bewegen. Bestimmen Sie die Welle $\phi_{\mathrm{Int}} = \phi_1 + \phi_2$, die sich aus der Interferenz dieser beiden Wellen ergibt. Zeigen Sie, dass es Positionen x_n gibt, an denen ϕ_{Int} immer verschwindet. Wie verhält sich die Amplitude $|\phi_{\mathrm{Int}}|$ im Allgemeinen als Funktion der Position? Wie würden Sie das Verhalten von ϕ_{Int} also beschreiben?

4. Plancksches Strahlungsgesetz (4+3+2+1)

Ein schwarzer Körper der Temperatur T emittiert elektromagnetische Strahlung mit spektraler Energiedichte $\rho_T(\nu)$

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 \frac{h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1} .$$

Hierbei ist die c die Lichtgeschwindigkeit, K die Boltzmannkonstante und h das Plancksche Wirkungsquantum.

a) Zeigen Sie, dass in guter Näherung für kleine Frequenzen $\nu \ll KT/h$

$$\rho_T(\nu) = a\nu^2 ,$$

und für große Frequenzen $\nu \gg KT/h$

$$\rho_T(\nu) = b\nu^3 e^{-h\nu/KT} ,$$

wobei a und b geeignet gewählte Konstanten sind. Welcher der beiden Grenzfälle kann *nicht* durch *klassische Physik* beschrieben werden?

b) Als Funktion der Frequenz besitzt $\rho_T(\nu)$ ein Maximum bei einer Frequenz $\nu_{max}(T)$. Zeigen Sie, dass $\nu_{max}(T)$ direkt proportional zur Temperatur T ist.

c) Die von einem schwarzen Körper der Temperatur T abgegebene Strahlungsleistung

$W(T)$ ist proportional zur totalen Energiedichte

$$u(T) := \int_0^\infty d\nu \, \rho_T(\nu) \, .$$

Zeigen Sie damit, dass $W(T)$ proportional zur vierten Potenz der Temperatur ist.

d) [*Vor allem für Geophysikerinnen und Meteorologinnen:*] In gar nicht so schlechter Näherung sind Sonne und Erde jeweils schwarze Körper, die sich im Strahlungsgleichgewicht befinden. Die Sonne erscheint der Erde als eine kleine Kreisscheibe am Himmel von etwa $d_s = 30$ Bogenminuten Durchmesser. Aus einem entsprechenden kleinen Raumwinkel von etwa $\Omega = \pi d_s^2/4$ strahlt die Sonne auf die Erde mit Schwarzkörperstrahlung der Sonnenoberflächentemperatur $T_S \approx 5800K$. Die Erde heizt sich dadurch auf bis zu einer Temperatur T_E. Im Strahlungsgleichgewicht stellt sich T_E genau so ein, dass die von der Erde in den ganzen Weltraum (d.h. Raumwinkel 4π) abgegebene Strahlungsleistung genau der von der Sonne eingestrahlen Leistung entspricht. Bestimmen Sie auf diese Weise T_E! [Tipp: c)]