Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Tim Schmitz, Christopher Max
Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
10. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 26.06.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

32. Zur Diskussion

a) Was versteht man unter der mikrokanonischen Verteilung und wozu ist sie gut?

b) Wie ermittelt man den mikrokanonischen Erwartungswert einer Größe A?

c) Wie ist Temperatur der mikrokanonischen Verteilung definiert?

33. Fakultät (3+7)

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann man N verschiedene Badetücher auf M Badeliegen verteilen, wenn auf keiner Liege mehr als ein Handtuch liegen darf? Ist diese Zahl für $N = 20$ und $M = 50$ größer oder kleiner als die Anzahl an Wassermolekülen in einem Olympia-Schwimmbecken?

b) Beweisen Sie die Näherung

$$n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Hinweis: Logarithmieren Sie die Gleichung und nähern Sie dann die auftretende Summe durch ein Integral.

34. Binomialkoeffizient (3+7)

Kombinatorische Abzählprobleme können oft auf einfach Weise durch geeignete Binomialkoeffizienten gelöst werden. Teilaufgabe a) ist ein Beispiel. Die in b) behandelte Näherung des Binomialkoeffizienten ist insbesondere in der Statistischen Physik bei der Berechnung der mikrokanonischen Entropie hilfreich (vgl. Vorlesung und nächste Aufgabe).

a) Von insgesamt N Kindern sollen im Sportunterricht $L \leq N$ Kinder zum Schwimmen, die $N - L$ restlichen Kinder in die Turnhalle geschickt werden. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Kinder auf diese Weise auf die beiden Sportstätten zu verteilen?

b) Zeigen Sie mittels Aufgabe 33 b) folgende Näherung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{l} \equiv \frac{n!}{l!(n-l)!}$ für den Fall $l \equiv \lambda n$:

$$\binom{n}{\lambda n} \approx e^{nh(\lambda)}$$

wobei die *binäre Entropie* $h(x)$ für $x \in [0,1]$ durch

$$h(x) = -x \ln x - (1-x)\ln(1-x)$$

gegeben ist. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $h(x)$ und zeigen Sie, dass

$$h'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

35. Zweizustandssysteme (1+9)

Ein makroskopisches System bestehe aus N gleichartigen Zweizustandssystemen. Jedes System kann die Zustände 0 und 1 mit Energien $E_0 = 0$ und $E_1 = \epsilon$ annehmen. N_1 bezeichne die Anzahl der Systeme die sich im Zustand 1 befinden. Uns interessiert die *mittlere Besetzungszahl* $n_1 = N_1/N$ des Zustands 1 in Abhängigkeit der Temperatur T.

a) Welchen Wert erwarten Sie für n_1 bei sehr niedrigen Temperaturen ($k_B T \ll \epsilon$) und welchen bei sehr hohen Temperaturen ($k_B T \gg \epsilon$)?

b) Ermitteln Sie n_1 als Funktion der Temperatur mittels der mikrokanonischen Verteilung. Skizzieren Sie n_1 als Funktion von $k_B T$ und überprüfen Sie, ob Ihre Erwartung in a) zutrifft.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die mikrokanonische Zustandssumme durch $Z(E) = \binom{N}{E/\epsilon}$ gegeben ist, vereinfachen Sie mittels der Näherung aus Aufgabe 34 b) und ermitteln Sie daraus die *Gibbs-Entropie* $S(E)$, definiert als

$$S(E) := k_B \ln Z(E)\,.$$

Die Beziehung zwischen Energie E und Temperatur T ist dann durch die fundamentale Relation

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E)}{\partial E}$$

gegeben. Auflösen nach E liefert unter Beachtung von $n_1 = \frac{E}{\epsilon N}$ das gesuchte Ergebnis.