

---

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)  
2. Übung

---

Sommersemester 2019

**Abgabe bis Mittwoch, den 17.04.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.**

### 5. Zur Diskussion

- a) Was ist ein hermitesches Skalarprodukt?
- b) Angenommen, es stünde Ihnen ein *einziges* Silberatom zur Verfügung, und Sie wüssten, dass dieses Atom entweder im Zustand  $\psi_+$  ( $z+$  polarisiert) oder im Zustand  $\phi_+$  ( $x+$  polarisiert) präpariert ist. Können Sie durch ein einziges Stern-Gerlach-Experiment mit Sicherheit entscheiden, in welchem Zustand sich das Atom vor dem Experiment befand? Hilft es Ihnen weiter, wenn Sie beliebig viele Stern-Gerlach-Experimente an dem Atom ausführen dürften? Wie sieht es aus, wenn Sie statt einem nun zehn Silberatome bekommen, und diese zehn Atome entweder alle im Zustand  $\psi_+$  oder alle im Zustand  $\phi_+$  präpariert sind?

### 6. Zustandsvektoren I (2+3+2+3)

Es seien  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zwei orthonormale Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems. Zwei weitere Zustände seien durch

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{2} \psi_1 + i \psi_2 \right) \quad \text{und} \quad \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \psi_1 - \sqrt{2} i \psi_2 \right)$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass  $\phi_1$  und  $\phi_2$  ebenfalls orthonormale Zustandsvektoren sind.
- b) Bestimmen Sie  $\langle \phi_1, \psi_1 \rangle$ ,  $\langle \psi_2, \phi_1 \rangle$ ,  $\langle \psi_1, \phi_1 \rangle$ ,  $\|\phi_1 + \phi_2\|$ , und  $\|\phi_1 + i\phi_2\|$ .
- c) Eine Messung prüfe das Vorliegen des Zustands  $\phi_1$ . Mit welchen Wahrscheinlichkeiten ergibt die Messung ein positives Ergebnis, wenn sich das System in den Zuständen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\psi_1$  oder  $\psi_2$  befindet?

- d) Wir betrachten nun einen Strahl  $x+$  polarisierter Silberatome. Der quantenmechanische Zustand  $\psi_+$  dieser Atome kann bekanntlich als Superposition  $z+$  und  $z-$  polarisierter Atome gemäß  $\phi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ + \psi_-)$  aufgefasst werden. Jemand möchte diesen Zustand folgendermaßen interpretieren:

*“Die Atome befinden sich zufällig entweder im Zustand  $\psi_+$  oder im Zustand  $\psi_-$ , jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit  $1/2$ . Von  $N$  Atomen sind daher im Mittel  $N/2$  im Zustand  $\psi_-$ , in Übereinstimmung mit den Resultaten einer  $\mu_z$ -Messung.”*

Was ist Ihrer Meinung nach richtig oder falsch an dieser Interpretation?

## 7. Hermitesches Skalarprodukt

(2+3+2+3)

Es sei  $\mathcal{B} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$  eine Orthonormalbasis eines  $d$ -dimensionalen Hilbertraumes  $\mathcal{H}$ . Weiterhin seien  $\psi$  und  $\chi$  zwei Vektoren aus  $\mathcal{H}$  mit den Komponenten  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$  bzw.  $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{C}$ ,

$$\psi = \sum_{i=1}^d a_i \phi_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi = \sum_{i=1}^d b_i \phi_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} \quad (1)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- $a_i = \langle \phi_i, \psi \rangle$
- $\langle \psi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^d a_i^* b_i$
- $|\langle i \psi, \chi \rangle|^2 = |\langle \psi, \chi \rangle|^2$
- $\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^d |a_i|^2$

## 8. Zustandsvektoren II

(3+4+3)

Im Rahmen des Stern-Gerlach-Experimentes können zwei Zustände der Silberatome durch die beiden Vektoren

$$\chi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+ \pm i \psi_-) \quad (2)$$

beschrieben werden. Hierbei seien  $\psi_{\pm}$  die Zustandsvektoren für  $z_{\pm}$  polarisierte Atome.

- Zeigen Sie, dass  $\chi_{\pm}$  eine Orthonormalbasis bilden.
- Wie können die Zustände  $\chi_{\pm}$  durch die Ihnen ebenfalls bekannten Zustände für  $x_{\pm}$  polarisierte Atome ausgedrückt werden?

- c) Interpretieren Sie die Zustände  $\chi_{\pm}$  bezogen auf das Stern-Gerlach-Experiment, indem sie bspw. die Messwahrscheinlichkeiten bzgl.  $x_{\pm}$  und  $z_{\pm}$  betrachten.