Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Tim Schmitz, Christopher Max
Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
5. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 15.05.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

18. Zur Diskussion

a) $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(p)$ seien Orts- bzw. Impulswellenfunktion des Teilchenzustands $|\psi\rangle$. In welcher mathematischen Beziehung stehen $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(p)$ und $|\psi\rangle$ zueinander?

b) Wie lautet die Ortswellenfunktion eines Impulseigenzustands $|\tilde{\varphi}_{p_0}\rangle$?

c) Wie lautet die Ortswellenfunktion eines Ortseigenzustands $|\varphi_{x_0}\rangle$?

d) Wie lautet die Impulswellenfunktion eines Ortseigenzustands $|\varphi_{x_0}\rangle$?

e) Wie lautet die Impulswellenfunktion eines Impulseigenzustands $|\tilde{\varphi}_{p_0}\rangle$?

f) Wie hängen Translation und Impuls zusammen?

g) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung eines Teilchens (1D) in Ortsdarstellung? Was versteht man unter der *zeitunabhängigen* Schrödinger-Gleichung?

19. Zustände in Orts- und Impulsdarstellung (2+4+2+6)

Zwei Zustände $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$ eines Teilchens (in einer Dimension) seien durch die Wellenfunktionen

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/(4\sigma^2)} e^{\pm ikx}.$$

gegeben. Hierbei sind σ und k positive reelle Konstanten.

a) Skizzieren Sie $|\psi_+(x)|^2$ und $|\psi_-(x)|^2$. Was ist die physikalische Bedeutung von $\int_{x_1}^{x_2} dx |\psi_+(x)|^2$?

b) Die Zustände $|\psi_\pm\rangle$ können bekanntlich gemäß $|\psi_\pm\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\, \tilde{\psi}_\pm(p)\, |\tilde{\varphi}_p\rangle$ durch Impulseigenzustände dargestellt werden. Bestimmen Sie die entsprechenden Koeffizienten (*Impulswellenfunktionen*) $\tilde{\psi}_+(p)$ und $\tilde{\psi}_-(p)$.

Hinweis: Sie dürfen dazu folgende Identität benutzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2+\beta u} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \beta \in \mathbb{C}.$$

(Insbesondere gilt die Gleichung also für $\beta = ik$.)

c) Skizzieren Sie nun $|\tilde{\psi}_+(p)|^2$ und $|\tilde{\psi}_-(p)|^2$. Was ist die physikalische Bedeutung von $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{2\pi\hbar}\, |\tilde{\psi}_+(p)|^2$?

d) Berechnen Sie schließlich die Erwartungswerte von x, x^2, p und p^2 in den Zuständen $|\psi_+\rangle$ und $|\psi_-\rangle$.

20. Teilchen im Kasten (2+4+4+2)

Ein ansonsten freies Teilchen auf einer Geraden (Koordinate x) werde durch ein unendlich hohes Potenzial bei $x < 0$ und $x > L$ auf das Intervall $[0, L]$ beschränkt. Wie z.B. in der Vorlesung gezeigt wurde, nimmt dadurch das Teilchen gequantelte Eigenenergien

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\,, \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{\pi}{L} n\,, n \in \mathbb{N}$$

in Energieeigenzuständen $|\psi_n\rangle$ mit Wellenfunktionen

$$\psi_n(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{L}}\, \sin\, k_n x$$

an. Zur Zeit $t = 0$ befinde sich nun das Teilchen im Zustand

$$|\chi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

a) Wie lautet der Systemzustand $|\chi(t)\rangle$ zur Zeit $t > 0$?

b) Skizzieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens zu Zeiten $t_0 = 0$, $t_1 = T/4$, $t_2 = T/2$, $t_3 = 3T/4$ und $t_4 = T$, wobei $T = 4mL^2/3\pi\hbar$.

c) Berechnen und skizzieren Sie ebenso die Erwartungswerte vom Ort und Impuls des Teilchens im Zustand $|\chi(t)\rangle$ als Funktion der Zeit $t \in [0, T]$.

d) Berechnen Sie den Energieerwartungswert des Teilchens im Zustand $|\chi(t)\rangle$.