Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Tim Schmitz, Christopher Max
Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
6. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 22.05.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

21. Zur Diskussion

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tunnelt ein Teilchen der Masse m bei einer Energie E durch ein Potenzial $U > E$ der Breite d?

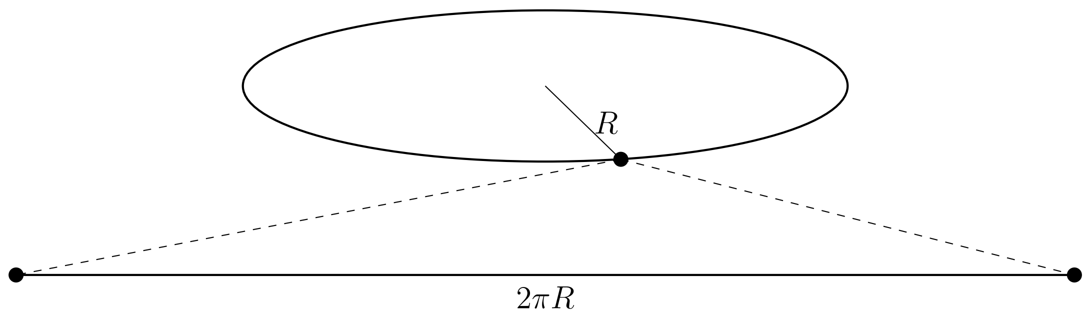
b) Bestimme Sie größenordnungsmäßig diese Wahrscheinlichkeit für

   (i) eine $1g$ schwere Murmel bei $U - E = 1j$ und $d = 1cm$,

   (ii) ein Elektron ($m \approx 10^{-30}kg$) bei $U - E = 0.1eV$ und $d = 1nm$.

22. Teilchen auf einem Ring (2+6+2+1+2)

Wir wollen ein Teilchen mit Masse m auf einem Ring mit Radius R betrachten. Als vereinfachtes Modell behandeln wir hier ein freies Teilchen, auch mit Masse m, in einem eindimensionalen Kasten mit Länge $2\pi R$, in dem wir die beiden Endpunkte miteinander identifizieren.



a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Problem? Welche Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen erfüllen?

b) Bestimmen Sie die Lösungen der zeitunabhängige Schrödingergleichung, und mithilfe der Randbedingungen die Eigenenergien. Vergleichen Sie die Eigenenergien mit denen des Teilchens im Kasten, besprochen in der Vorlesung.

Hinweis: Sie werden zu jeder Eigenenergie zwei unabhängige Energieeigenfunktionen finden. Die Eigenenergien sind somit entartet.

Wir wollen nun den Drehimpuls des Teilchens betrachten. Naiv kann man dieser Größe hier den Operator $L = R\,p$ zuordnen, wobei p der Impulsoperator sei.

c) Was sind die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Drehimpulsoperators? Zeigen Sie, dass diese Eigenfunktionen auch Energieeigenfunktionen sind.

d) Sie wissen bereits, dass der Impulsoperator der Erzeuger von Translationen ist. Welche Operation erzeugt hier unser Drehimpulsoperator?

e) Nehmen Sie an, dass Teilchen ist in einem Eigenzustand des Drehimpulsoperators. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen in einem beliebigen Intervall $[a, b]$ im Kasten aufhält? Was muss gelten, wenn man das Intervall so groß wie den Kasten selber wählt?

23. Streuung an einem Delta-Potential (3+4+1)

In dieser Aufgabe betrachten wir die quantenmechanische Streuung eines Teilchens mit Masse m in einer Dimension an einem Delta-Potential $U(x) = \lambda\,\delta(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Problem? Integrieren Sie diese Gleichung über x von $-\epsilon$ bis ϵ, und betrachten Sie $\epsilon \to 0^+$, um die Anschlussbedingung $\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)$ für die Wellenfunktion $\psi(x)$ zu finden.

b) Bestimmen Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizienten T und R. Wählen Sie dazu einen passenden Streuansatz für die Wellenfunktion. Die Wellenfunktion muss dann die oben bestimmte Anschlussbedingung erfüllen und stetig sein. Warum gilt $R + T = 1$?

c) Macht es einen Unterschied, ob λ positiv oder negativ ist?

24. Nullpunktsenergie eines harmonischen Oszillators (4+2)

Was geschieht mit der Nullpunktsenergie E_0 eines Teilchen im quadratischen Potenzial $\frac{1}{2}kx^2$, wenn das Potenzial zur Zeit $t = 0$ instantan abgeschaltet wird? Dieser Frage gehen wir in dieser Aufgabe nach.

Für $t < 0$ liegt offenbar ein harmonischer Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,, \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{k/m}, \tag{1}$$

vor. Das Teilchen befinde sich für Zeiten $t < 0$ im Grundzustand mit Energie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

und Grundzustandsfunktion

$$\psi_0(x) = (\pi l^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right), \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie (für $t < 0$) die Erwartungswerte von x^2 und p^2 des Teilchens im Grundzustand $|\psi_0\rangle$. Wie lauten demnach die Erwartungswerte von kinetischer und potenzieller Energie $\frac{1}{2m}p^2$ bzw. $\frac{m\omega^2}{2}x^2$?

   Hinweise:

   - $\int x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{d\lambda} \int e^{-\lambda x^2} dx\Big|_{\lambda=a}$
   - $\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \frac{m\omega^2}{2}\langle x^2\rangle$

b) Unmittelbar nach Abschaltung des Potenzials zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das nunmehr freie Teilchen immer noch im Grundzustand des harmonischen Oszillators. Welchen Erwartungswert hat nun die Teilchenenergie? Ändert er sich für Zeiten $t > 0$? Stimmt er mit der Teilchenergie (d.h. der Nullpunktsenergie $\frac{1}{2}\hbar\omega$) für $t < 0$ überein? Wenn nein, gibt es ein Problem mit der Energieerhaltung?