Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Tim Schmitz, Christopher Max
Rochus Klesse

Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)
7. Übung

Sommersemester 2019

Abgabe bis Mittwoch, den 29.05.2019, 11:00 Uhr in den entsprechenden Briefkästen vor dem Eingang des Instituts für Theoretischen Physik.

25. Zur Diskussion: harmonischer Operator

a) Wie lauten die Energieeigenwerte eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω?

b) Wie wirken die Operatoren b und $b^\dagger$ auf den n-ten Oszillatorzustand $|\psi_n\rangle$? Was passiert genau für $n = 0$?

c) Was ist $[b, b^\dagger]$?

d) Wie lautet der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators dargestellt in den Operatoren b und $b^\dagger$?

e) Warum hat $b^\dagger b$ keine negativen Eigenwerte?

f) Zeigen Sie: $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.

26. Teilchen an einer Potenzialkante (2+4+3)

Gegeben sei ein Teilchen der Masse m und Energie $E > 0$, dass von $x = -\infty$ auf die Potenzialkante

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ -U_0 & \text{für } x \geqslant 0. \end{cases}$$

für ein $U_0 > 0$ trifft.

a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung des Systems? Welche Stetigkeitsbedingungen gelten für die Lösung der Schrödingergleichung?

b) Bestimmen Sie durch einen geeigneten Streuansatz wie in der Vorlesung die Wellenfunktion ψ des Teilchens.

c) Bestimmen Sie die Reflexionswahrscheinlichkeit R. Worin unterscheiden sich diese Wahrscheinlichkeit vom klassischen Bild? Was passiert im Limes $U_0 \to \infty$?

27. Harmonischer Oszillator (3+4)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,, \quad \text{wobei} \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$

Der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ ist durch die Wellenfunktion

$$\psi_0(x) = (\pi\ell^2)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2\ell^2}\right), \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

gegeben

a) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi_1(x)$ des ersten angeregten Oszillatorzustands $|\psi_1\rangle$. Benutzen Sie dazu das Resultat

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}}\left(\frac{x}{\ell} - \ell\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_n(x)$$

aus der Vorlesung.

b) Der Oszillator sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle\,\big).$$

Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ und berechnen Sie daraus die zeitabhängigen Erwartungswerte der Größen x, x^2, p und p^2. Benutzen Sie dazu die Identitäten

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}\big(b^\dagger + b\big) \quad \text{und} \quad p = \frac{i\hbar}{\ell\sqrt{2}}\big(b^\dagger - b\big).$$

(Hinweis: Wie Sie bereits in den vorherigen Übungen gesehen haben, ist die Berechnung der Integrale zu den jeweiligen Erwartungswerten recht aufwendig. Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Sie anhand obiger Formeln einen einfacheren Weg finden, um diese Erwartungswerte zu berechnen.)