Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Rochus Klesse
Tim Schmitz, Christopher Max

Zusatzübung zur Theoretischen Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

Sommersemester 2019

Diese freiwillige Zusatzübung soll zur Wiederholung einiger Grundlagen dienen, die für das weitere Verständnis von Vorlesung und Übungen nötig sind. Bei Interesse können Sie Ihre Lösung dieser Übung bei Ihrem Tutor zur Korrektur abgeben.

Hermitesches Skalarprodukt

Es seien $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ und $|\psi_3\rangle$ orthonormale Zustandsvektoren eines quantenmechanischen Systems. Weitere Zustände seien gegeben durch $|\phi_1\rangle = 2\,|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$, $|\phi_2\rangle = 2\,|\psi_1\rangle + i\,|\psi_2\rangle$ und $|\phi_3\rangle = 3\,|\psi_1\rangle - 2i\,|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle$.

a) Was ist $\langle\psi_i|\psi_j\rangle$ für beliebige i, j?

Bestimmen Sie

b) $\langle\psi_i, \phi_3\rangle$ und $\langle\phi_3, \psi_i\rangle$ für alle i.

c) $\langle\phi_i|\phi_j\rangle$ für alle i, j mit $i \neq j$. Zeigen Sie explizit, dass $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \langle\phi_j|\phi_i\rangle^*$.

d) $||\phi_j||$ für alle j, $||\phi_1 + \phi_2||$ und $||2\phi_2 + \phi_3||$.

Betrachten Sie nun den Vektor $|\chi\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle\,|\phi_1\rangle$.

e) Bestimmen Sie $\langle\phi_2|\chi\rangle$ und $||\chi||^2$. Warum ist $\langle\phi_2|\chi\rangle$ reell?

Rechnen mit Summen

Bestimmen Sie

a) $\sum_{k=1}^{3} k^2$ und $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$.

b) $\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right)$, $\sum_{j,k=1}^{3} \frac{j^2}{k}$ und $\sum_{k=1}^{3} k$.

c) $\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=0}^{2} k^j$.

Orthonormalbasen in Hilberträumen

Es sei $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ eine Orthonormalbasis eines n-dimensionalen Hilbertraumes, $n \geq 3$. Weitere Zustandsvektoren seien gegeben durch

$$|\phi_1\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j |\psi_j\rangle, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle),$$

$$|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |\psi_j\rangle, \quad |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |\psi_j\rangle \; + (1-n) |\psi_n\rangle \right),$$

wobei $a_j \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie $\langle \psi_j | \phi_1 \rangle$, $\langle \psi_j | \phi_2 \rangle$, $\langle \psi_j | \phi_3 \rangle$ und $\langle \psi_j | \phi_4 \rangle$ für alle $j = 1, \dots, n$.

b) Bestimmen Sie $\langle \phi_1 | \phi_3 \rangle$, $\langle \phi_3 | \phi_1 \rangle$, $\langle \phi_2 | \phi_1 \rangle$, $\langle \phi_3 | \phi_2 \rangle$ und $\langle \phi_2 | \phi_4 \rangle$.

c) Zeigen Sie, dass $|\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ ebenfalls orthonormal sind.

d) Welches $\alpha \in \mathbb{R}$ muss gewählt werden, s.d. $\alpha |\phi_1\rangle$ auch normiert ist?

e) Wir nehmen nun $n = 4$ an. Finden Sie ein ϕ_5, s.d $|\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle, |\phi_5\rangle$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes bilden.